точке поверхности. Для одномерного случая $-\lambda \dfrac{\partial T(0,t)}{\partial x} = q_1(t)$; $-\lambda \dfrac{\partial T(L,t)}{\partial x} = q_2(t)$, откуда следует $\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = -\dfrac{q_1(t)}{\lambda}$ и $\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = -\dfrac{q_2(t)}{\lambda}$.

Здесь $q_1(t)$ и $q_2(t)$ – заданные функции времени или постоянные.

Если границы тела (например концы стержня) теплоизолированы, то тепловой поток равен нулю. В этом случае граничные условия запишутся в виде

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = 0.$$

3.2.3. Граничные условия третьего рода

В этом случае задаётся температура окружающей среды T_0 и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Граничное условие третьего рода характеризует закон теплообмена между поверхностью и окружающей средой в процессе нагревания или охлаждения тела. Для описания процесса теплообмена используется закон Ньютона (п. 2.4). Количество теплоты, отдаваемое единицей поверхности тела в единицу времени, $q = \alpha \cdot (T - T_0)$.

Согласно формуле (2.3), количество теплоты, проходящей через поперечное сечение, равно $-\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} \cdot S \cdot \Delta t$. При $T > T_0$ (рис. 2.2) на правом конце стержня направление потока, идущего во внешнюю среду, совпадает с направлением оси Ox. Плотность теплового потока равна $-\lambda \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}$.

На левом конце направление потока противоположно. Плотность теплового потока $-\lambda \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}$.

Если считать коэффициенты теплоотдачи и температуру среды одинаковыми и постоянными, т. е. $\alpha_{x=0} = \alpha_{x=L} = \alpha - const$ и $T_{x=0} = T_{x=L} = T_0 - const$ (в общем случае они могут быть не только разными константами, но и функциями времени и температуры), то краевые условия на торцевых сечениях запишутся в виде

$$\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha\left(T_{x=0} - T_0\right),$$

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = \alpha\left(T_{x=L} - T_0\right),$$

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ухтинский государственный технический университет»
(УГТУ)

И. Ф. Чупров, Е. А. Канева

Уравнения параболического типа и некоторые методы их решения

Учебное пособие

Ухта 2012

УДК 517.944 (075.8)
Ч 92

Чупров, И. Ф.
Уравнения параболического типа и некоторые методы их решения [Текст] : учеб. пособие / И. Ф. Чупров, Е. А. Канева. – Ухта : УГТУ, 2012. – 103 с. : ил.

ISBN 978-5-88179-697-6

В учебном пособии рассматриваются уравнения параболического типа (теплопроводности, диффузии, пьезопроводности) на прямой. Значительное внимание уделено выводу уравнений с учётом соответствующих физических факторов, а также интерпретации краевых условий. Из методов решений рассмотрены разделение переменных и интегральные преобразования Фурье.

Учебное пособие посвящено наиболее часто встречающимся в нефтегазопромысловой механике уравнениям параболического типа, имеющим и важное прикладное значение при создании геолого-математических и технологических моделей разработки нефтяных и газовых месторождений углеводородного сырья, математическом моделировании фильтрационных процессов флюидов в горных породах, решения других актуальных геолого-промысловых задач.

Учебное пособие предназначено для магистрантов и аспирантов технических вузов, обучающихся по направлению 130500 – «Нефтегазовое дело».

Учебное пособие рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Ухтинского государственного технического университета.

Рецензенты: А. А. Латышев, заместитель начальника отдела филиала ООО «Газпром ВНИИГАЗ» в г. Ухте, доцент, к.т.н.; Р. В. Агиней, начальник отдела центра «Надёжность и ресурс объектов единой системы газоснабжения филиала ООО «Газпром ВНИИГАЗ» в г. Ухте, д.т.н.

ISBN 978-5-88179-697-6

нечно «большая» («бесконечно длинный» стержень, «бесконечно большой» пласт и т. д.). С физической точки зрения, это означает, что в течение изучаемого промежутка времени граничные эффекты (условия на границе) не оказывают заметного влияния на исследуемую величину.

3.2. Граничные условия для уравнения теплопроводности

Если размеры тела (стержня, пласта), внутри которого изучается процесс теплопроводности, не очень велики и влиянием граничных эффектов пренебречь нельзя, то в этих условиях одни начальные условия уже не обеспечивают единственность решения задачи. Тогда нужно задавать граничные условия. В задачах теплопроводности обычно используют граничные условия трёх типов.

3.2.1. Граничные условия первого рода

Условия первого рода означают, что на границе тела задана температура в виде функции времени или постоянная температура (рис. 3.2) $T(0,t)=T_1(t)$; $T(L,t)=T_2(t)$ или $T(0,t)=T_1-const;$ $T(L,t)=T_2-const$. Записывают также: $T_{x=0}=T_1;$ $T_{x=L}=T_2$.

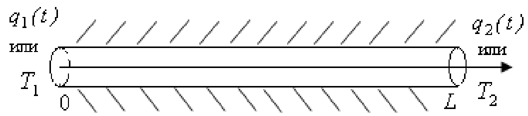


Рис. 3.2 – На границе задана температура

Задание постоянных температур на границах можно представить в виде следующего эксперимента. На концах стержня установлены два нагревающих (охлаждающих) элемента и термостат. Термостат контролирует температуру T_1 и T_2. Если температура отклонится от предписанных T_1 и T_2, то устройства приходят в действие для коррекции температуры.

Задачи с граничными условиями встречаются очень часто. В некоторых случаях суть их состоит в том, чтобы найти такие граничные условия $q_1(t)$ и $q_2(t)$, которые заставят температуру тела изменяться заданным образом. Такая задача уже будет обратной по отношению к поставленной выше задаче определения температуры тела.

3.2.2. Граничные условия второго рода

Под граничными условиями второго рода понимают задание плотности теплового потока $-\lambda\dfrac{\partial T}{\partial n}$. Т. е. производной в направлении нормали в любой

3. Начальное и граничные условия к уравнениям типа теплопроводности. Преобразование неоднородных граничных условий в однородные

Дифференциальные уравнения с частными производными (УЧП), как и обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), имеют бесчисленное множество решений. Чтобы из этого множества выбрать то единственное решение, которое соответствует реальному физическому процессу (например, распределение температуры в стержне, распределение давления в нефтяном пласте), надо задать некоторые дополнительные условия. В теории ОДУ они назывались начальными условиями. В итоге получалась задача Коши, для которой выполняются теоремы о существовании и единственности решения.

3.1. Начальные условия для уравнения типа теплопроводности

Для уравнения теплопроводности задаётся одно начальное условие $T_{t=0} = f(x)$ (или в другой записи $T(x,0) = f(x)$). Физически оно означает, что начальное распределение температуры имеет вид $f(x)$ (рис. 3.1). Для уравнения теплопроводности на плоскости или в пространстве начальное условие имеет такой же вид, только функция f будет зависеть, соответственно, от двух или трёх переменных, т. е. $T_{t=0} = f(x,y)$, $T_{t=0} = f(x,y,z)$.

Необходимо отметить, что начальное условие задаётся для нестационарных уравнений, т. е. таких уравнений, которые описывают нестационарные (зависящие от времени) процессы. Это – волновые уравнения и уравнения типа теплопроводности.

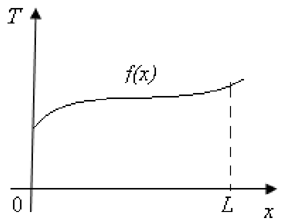


Рис. 3.1 – Графическое изображение начального условия для одномерного уравнения

Если процесс изучается на всей прямой $(-\infty < x < +\infty)$, на всей плоскости или в неограниченном пространстве, то для УЧП ставится тоже задача Коши, т. е. задаётся только начальное условие. В этом случае говорят – область беско-

Оглавление

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{(в пространстве).}$$

С помощью оператора Лапласа уравнение типа теплопроводности записывается так

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

или

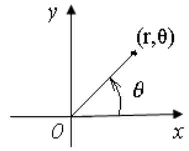
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Во многих задачах возникает необходимость знать выражение для лапласиана в других координатах. Если, например, граница области – окружность, то естественно перейти к полярным координатам (r, θ), а если область трёхмерная, а её граница – цилиндр, то следует перейти к цилиндрическим координатам (r, θ, z).

Ответим на вопрос: как выглядит лапласиан в полярных и цилиндрических координатах.

Полярные координаты определяются соотношениями

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \ \text{ или } \ r^2 = x^2 + y^2,\ tg\theta = \frac{y}{x}.$$



Лапласиан в полярных координатах имеет вид

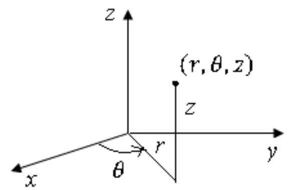
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Цилиндрические координаты связаны с декартовыми следующими соотношениями

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$$

или

$$r^2 = x^2 + y^2,\ tg\,\theta = \frac{y}{x},\ z = z\,.$$



Лапласиан в цилиндрических координатах будет

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

В этих случаях уравнения типа теплопроводности будут с переменными коэффициентами. Так что уравнения, содержащие лапласианы в полярных или цилиндрических координатах, решать труднее.

Если в качестве постулата принять закон Дарси $\bar{v} = -\frac{k}{\mu} \cdot grad\, P$, то получим дифференциальное уравнение упругого режима

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k}{\mu(\beta_{ск} + m \cdot \beta_{ж})} \cdot div(grad\, P). \qquad (2.21)$$

Здесь k – проницаемость, $м^2$; μ – динамическая вязкость, $Па \cdot с$; m – пористость пласта; $\beta_{ск}$ и $\beta_{ж}$ – соответственно коэффициенты объёмной упругости скелета пласта и упругой жидкости, $Па^{-1}$.

Коэффициент пропорциональности принято называть коэффициентом пьезопроводности и обозначать $\chi = \frac{k}{\mu \cdot \beta^*}$, где $\beta^* = \beta_{ск} + m \cdot \beta_{ж}$, а само уравнение – уравнением пьезопроводности.

В одномерном случае уравнение пьезопроводности имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \qquad (2.22)$$

Таким образом, с точки зрения математики, теплопроводность, диффузия, пьезопроводность («пьезо» – давление) описываются однотипными дифференциальными уравнениями.

2.10. Уравнения типа теплопроводности на плоскости и в пространстве

Во всех приведённых выше задачах изучаемая величина (температура, концентрация, давление) рассматривалась как функция, зависящая от одной пространственной переменной x и от времени t, т. е. $u = u(x,t)$. При этом предполагалось, что в направлении других осей координат функция u постоянна. Например, температура всех точек в каждом сечении стержня постоянна.

Однако часто встречаются задачи, где необходимо учитывать изменение изучаемой величины в двух или в трёх направлениях, т. е. на плоскости (Oxy) или в пространстве $(Oxyz)$. В этом случае в уравнениях, рассмотренных выше, появятся дополнительные члены.

Рассмотрим самый важный оператор в математической физике.

Оператором Лапласа (лапласианом) называется выражение вида

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{(на плоскости);}$$

Предисловие

Несмотря на наличие богатой литературы по математической физике, студенты и аспиранты высших технических учебных заведений, а также инженеры испытывают серьёзные затруднения в подборе методического руководства по этому важному разделу прикладной математики. Это объясняется тем, что почти вся литература, существующая в этой области, развивает математический аппарат столь далеко, что оказывается недоступной для указанного выше круга читателей.

Ориентация пособия на широкую «нематематическую» аудиторию определила стиль изложения рассматриваемых вопросов: интуитивный подход и большое внимание к физическому смыслу уравнений, краевых условий и анализу результатов. Предполагается, что читатель знаком с основами дифференциального, интегрального исчислений и дифференциальных уравнений.

В учебном пособии рассматриваются только уравнения параболического типа. Уравнения этого типа чаще других встречаются в задачах разведки, разработки и транспорта нефти и газа, т. е. в задачах специализации по направлению 130500 «Нефтегазовое дело".

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с частными производными

1.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Будем предполагать, что читатель знаком с основными дифференциальными уравнениями, где искомая функция зависит от одной независимой переменной. Как известно, такие уравнения называются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Приведём лишь самые основные сведения.

Уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$ имеет бесчисленное множество решений $y = \varphi(x,C)$. Для определения произвольной постоянной C необходимо задать условие $y_{x=x_0} = y_0$. Общее решение дифференциального уравнения второго порядка $y'' = f(x,y,y')$ содержит две произвольные постоянные $y = \varphi(x,C_1,C_2)$. Выделить частное решение можно путём задания начальных условий (задача Коши) $y_{x=x_0} = y_0$, $y'_{x=x_0} = y'_0$. Подставляя эти условия в общее решение и в его производную, получим два уравнения для отыскания произвольных постоянных C_1 и C_2.

В дальнейшем особенно часто будут встречаться линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Решением однородного уравнения $y''+p(x)y'+q(x)y = 0$ является линейная комбинация двух его частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$, если они линейно независимы ($y_2 \neq ky_1$, где $k - const$): $y_0 = C_1y_1 + C_2y_2$.

Общее решение неоднородного уравнения $y''+p(x)y'+q(x)y = f(x)$ есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо его частного решения $y_н = y_0 + y_ч$.

1.2. Понятие об уравнениях с частными производными

Определение. Дифференциальные уравнения, содержащие неизвестную функцию нескольких переменных и её частные производные, называются уравнениями с частными производными.

В отличие от ОДУ, в которых неизвестная функция зависит только от одной переменной, в уравнениях с частными производными неизвестная функция зависит от нескольких переменных (например, температура $u(x,t)$ зависит от координаты x и времени t).

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\cdot\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v\cdot\frac{\partial C}{\partial x}. \qquad (2.19)$$

Если конвективный механизм превалирует над диффузией, то получим уравнение конвективной диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v\cdot\frac{\partial C}{\partial x} = 0. \qquad (2.20)$$

Эти уравнения являются полными аналогами уравнения конвективного теплопереноса, изложенными в п. 2.5.

2.9. Уравнение пьезопроводности

При разработке нефтяных месторождений различают несколько режимов. Классификация режима разработки пласта осуществляется по характеру доминирующих сил, движущих в них нефть.

Одним из режимов разработки нефтяного месторождения является упругий режим, при котором пластовое давление превышает давление насыщения. Упругий режим, с точки зрения физики, – расходование или пополнение упругой энергии пласта, происходящее благодаря сжимаемости пород и насыщающих их жидкостей. По мере отбора нефти запас упругой энергии в призабойной зоне уменьшается, т. е. нефть и породы оказываются менее сжатыми, чем раньше. С уменьшением пластового давления до значения, меньшего, чем давление насыщения, из нефти начинает выделяться растворённый в ней газ и режим пласта изменится – упругий режим сменится режимом растворённого газа или газонапорным.

Теорию упругого режима используют для решения следующих задач разработки месторождений:

1. При определении давления на забое скважины в результате её пуска, остановки или изменения режима эксплуатации.
2. При расчётах перераспределения давления в пласте и, соответственно, изменения давления на забоях скважин в результате пуска – остановки других скважин.
3. При расчётах восстановления давления на контуре нефтеносного пласта в случае перехода на разработку с применением заводнения.
4. При определении времени, в течение которого в элементе системы разработки с воздействием на пласт с помощью заводнения наступит установившийся режим.

1. Если температура $T(x,t)$ больше среднего значения температуры в двух соседних точках (кривая выпукла вверх), то $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} < 0$ (рис. 2.6, а). Тогда температура в точке x будет уменьшаться. Отсюда следует, что и $\frac{\partial T}{\partial t} < 0$.

2. Если температура $T(x,t)$ (рис. 2.6, б) меньше среднего значения температуры в двух соседних точках (кривая вогнута), то $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} > 0$. Тогда температура в точке x будет возрастать. Отсюда следует, что $\frac{\partial T}{\partial t} > 0$.

3. Если $T(x,t)$ равна среднему значению в соседних точках, то $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$. Откуда следует, что $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ (поток тепла вдоль оси *Ox* равен нулю).

2.8. Уравнение диффузии

Диффузия (распространение, растекание, рассеивание) – движение частиц среды, приводящее к переносу вещества и выравниванию концентрации.

Если среда неравномерно заполнена, например газом, то имеет место диффузия его из мест с более высокой концентрацией в места с меньшей концентрацией. Это же явление наблюдается и в растворах, где концентрация растворённого вещества непостоянна.

В процессе диффузии искомой функцией является концентрация диффундирующего вещества, которую обычно обозначают через $C = C(x, y, z, t)$. Этот процесс во многом схож с распространением тепла. В предположениях, аналогичных тем, которые мы делали в п. 2.2 при выводе уравнения теплопроводности в линейном случае, функция $C = C(x, t)$ удовлетворяет уравнению (линейная задача диффузии в тонкой трубке с непроницаемой стенкой)

$$\frac{\partial C}{\partial x} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \qquad (2.18)$$

Положительный коэффициент D называется коэффициентом диффузии. Он играет роль коэффициента a^2 в теории теплопроводности.

Если происходит диффузия вещества и конвективный перенос потока со скоростью ν, то уравнение диффузии примет вид

Примечание. Для упрощения записи часто используют следующие обозначения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t, \ \frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = u_{tx}.$$

Большое число физических законов природы можно сформулировать на языке уравнений с частными производными. В качестве примеров можно привести закон теплообмена Ньютона, уравнение движения Ньютона, скорость фильтрации по закону Дарси. Во всех этих уравнениях физические явления описываются на языке пространственных и временных производных. Производные появляются потому, что они описывают важнейшие физические величины (скорость, ускорение, силу, трение, поток и т. д.).

1.3. Типы уравнений с частными производными

Уравнения с частными производными можно классифицировать по многим признакам. Классификация важна потому, что, как оказывается, для каждого класса существует своя общая теория и методы решения уравнений.

1. Порядок уравнения. Порядком уравнения называется наивысший порядок частных производных, входящих в уравнение.

Например: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$ – уравнение первого порядка; $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – уравнение второго порядка; $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ – уравнение третьего порядка.

2. Число переменных. Числом переменных называется число независимых переменных.

Например: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – уравнение с двумя переменными t, x; $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ – уравнение с тремя переменными t, r, θ.

3. Линейность. Уравнения с частными производными бывают линейными и нелинейными. В линейные уравнения зависимая переменная и все её частные производные входят линейным образом. В частности, они не умножаются друг на друга, не возводятся в квадрат и т. д.

Например: $x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ – линейное уравнение;

$$\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+u^2=0 \text{ – нелинейное уравнение;}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=e^{-t}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+sin\,u \text{ – нелинейное уравнение.}$$

Остановимся подробнее на линейных уравнениях второго порядка с двумя независимыми переменными. Такие уравнения в общем случае имеют вид

$$A\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+E\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+F\cdot u=G, \qquad (1.1)$$

где $A,\ B, C, D, E, F, G$ – константы или заданные функции переменных x и y.

4. Однородность. Уравнение (1.1) называется однородным, если правая часть $G(x,y)$ тождественно равна нулю для всех x и y. Если $G(x,y)\neq 0$, то уравнение называется неоднородным.

5. Виды коэффициентов. Если коэффициенты $A,\ B, C, D, E, F$ уравнения (1.1) постоянны, то уравнение называется уравнением с постоянными коэффициентами.

6. Три основных типа линейных уравнений. Все линейные уравнения второго порядка вида (1.1) относятся к одному из трёх типов: а) параболический, б) гиперболический, в) эллиптический.

Параболический тип. Уравнения параболического типа описывают процессы теплопроводности (перенос энергии от более нагретых участков тела к менее нагретым в результате теплового движения и взаимодействия составляющих его частиц) и диффузии (движение частиц среды, приводящее к переносу вещества и выравниванию концентраций) и определяются условием $B^2-4AC=0$.

Гиперболический тип. Уравнения гиперболического типа описывают волновое движение и определяются условием $B^2-4AC>0$.

Эллиптический тип. Уравнения эллиптического типа описывают установившиеся (не зависящие от времени) процессы и определяются условием $B^2-4AC<0$.

Примеры:

1) $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: $A=a^2$, $B=C=0$, $B^2-4AC=0$ – уравнение параболического типа;

Уравнение (2.17) говорит о том, что температура $T(x,t)$ в некоторый момент времени t в некоторой точке x увеличивается $\left(\frac{\partial T}{\partial t}>0\right)$ или уменьшается $\left(\frac{\partial T}{\partial t}<0\right)$ в соответствии с тем, положительна или отрицательная вторая производная $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

Посмотрим, как можно интерпретировать $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ на языке теплопроводности (рис. 2.6), где $\frac{T(x-\Delta x,t)+T(x+\Delta x,t)}{2}$ – средняя температура в точке x.

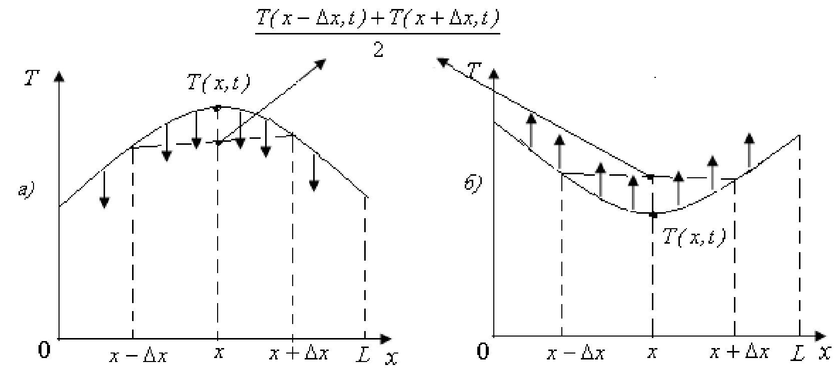


Рис. 2.6 – Профиль температуры в момент времени t
(стрелками показано изменение в соотвествии с уравнением (2.17))

Аппроксимируем величину $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ конечными разностями

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\approx\frac{T(x+\Delta x,t)-2T(x,t)+T(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2}=$$

$$=\frac{2}{\Delta x^2}\left(\frac{T(x+\Delta x,t)+T(x-\Delta x,t)}{2}-T(x,t)\right).$$

2.6. Обобщение результатов

Положим, что в одномерном случае (стержень) одновременно имеют место все приведённые выше факторы: теплопроводность, тепловой источник (сток), теплообмен через боковую поверхность, конвективный теплоперенос. Тогда уравнение параболического типа будет иметь вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\alpha \cdot P}{c \cdot \rho \cdot S} \cdot \left(T - T_0\right) + \frac{F(x,t)}{c \cdot \rho \cdot S}. \qquad (2.16)$$

Каждое слагаемое в правой части имеет определённый смысл:

1) если $\lambda = 0$, $a^2 = \dfrac{\lambda}{c \cdot \rho} = 0$, то материал является фактически теплоизолятором;

2) если $v = 0$ – нет конвективного теплопереноса;

3) если $\alpha = 0$ – боковая поверхность теплоизолирована;

4) если $F = 0$ – тепловые источники отсутствуют.

Знаки последних трех слагаемых в правой части уравнения (2.16) необходимо выбирать из физических предпосылок поставленной задачи.

2.7. Интерпретация основного уравнения теплопроводности

Основное одномерное уравнение теплопроводности записывается в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty. \qquad (2.17)$$

Это уравнение связывает между собой $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ – скорость изменения температуры во времени и $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ – вогнутость температурного профиля $T(x,t)$, которая служит мерой отличия температуры в данной точке от температуры в соседних точках. Коэффициент пропорциональности a^2 характеризует свойства материала.

Примечание. Выпуклость кривой определяется теоремой, известной из курса математики:

Если $y = f(x)$ во всех точках интервала (a,b) имеет отрицательную производную, т. е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх. Если же $f''(x) > 0$ во всех точках интервала (a,b) – график функции выпуклый вниз (вогнутый).

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: $A = a^2$, $B = 0$, $C = 1$, $B^2 - 4AC = 4a^2 > 0$ – уравнение гиперболического типа;

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$: $A = C = 0$, $B = 1$, $B^2 - 4AC = 1 > 0$ – уравнение гиперболического типа;

4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$: $A = C = 1$, $B = 0$, $B^2 - 4AC = -4 < 0$ – уравнение эллиптического типа;

5) $y \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$: $A = y$, $B = 0$, $C = 1$, $B^2 - 4AC = -4y$ – уравнение эллиптического типа при $y > 0$, уравнение параболического типа при $y = 0$, уравнение гиперболического типа при $y < 0$.

Из последнего примера видно, что тип уравнения может изменяться от точки к точке. В общем случае величина $B^2 - 4AC$ является функцией независимых переменных. Следовательно, тип уравнения может изменяться в области определения уравнения.

Примечание. Интересно отметить, что классификация линейных уравнений второго порядка с частными производными построена с использованием терминологии и принципов определения кривых 2-го порядка. В аналитической геометрии доказывается теорема:

кривая, соответствующая уравнению

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

является:

а) параболой при $B^2 - 4AC = 0$;

б) гиперболой при $B^2 - 4AC = 1 > 0$;

в) эллипсом при $B^2 - 4AC < 0$.

2. Уравнения типа теплопроводности

2.1. Предварительные замечания

В каждой области знаний существует набор основных принципов, правильность которых очевидна. Все остальные утверждения должны выводиться из этих основных принципов. В теории теплопроводности основным принципом является закон сохранения энергии (тепловой энергии). Все остальные утверждения выводятся из этого основного принципа.

Примечание. При тепловых процессах закон сохранения энергии, или первый закон термодинамики, формулируется так: бесконечно малое изменение внутренней энергии состоит из двух частей – из количества тепла, полученного телом, и произведённой телом работы.

Применим первый закон термодинамики для исследования процесса распространения тепла в теле. Рассмотрим два сечения: 1-1 и 2-2 (рис. 2.1).

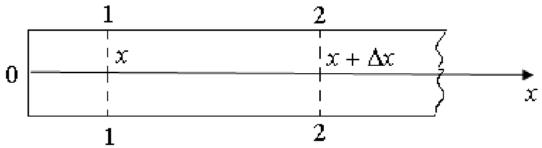


Рис. 2.1 – Распространение тепла в теле

Тело имеет какую-то определённую начальную температуру. К одному концу тела подводится источник тепла или холода. Соответственно этому в теле происходит нагревание или охлаждение. Температура в рассматриваемом сечении будет зависеть от расстояния точки до места подвода тепла и времени, $T = T(x, t)$. На текущее распределение температуры в теле оказывает влияние начальное распределение температуры, а также условия в концевых сечениях тела, т. е. температура на концах участка тела.

Пусть через сечение 1-1 подводится количество теплоты, равное $Q(x, t)$. Через сечение 2-2 отводится количество теплоты $Q(x + \Delta x, t)$. Разность между этими количествами тепла $\Delta Q = Q(x + \Delta x, t) - Q(x,t)$, в соответствии с первым законом термодинамики, затрачивается на изменение температуры между сечениями 1-1 и 2-2.

Если $\Delta Q < 0$ («вошло» больше, чем «вышло»), то тело нагревается. В противном случае – охлаждается, т. е. в первом случае $\Delta T = T(x, t + \Delta t) - T(x,t) > 0$; во втором случае $\Delta T < 0$.

лопроводности, так и конвекции (перемещение макроскопических частей среды (жидкости, газа), приводящее к переносу теплоты или массы).

Такие задачи, например, возникают при закачке горячей жидкости в нефтяные пласты. В этом случае пласт прогревается как с помощью теплопроводности, так и конвекции.

Количество тепла, переносимого механизмом конвекции, определяется

$$\Delta Q_{кон} = c \cdot \rho \cdot v \cdot \Delta T \cdot S \cdot \Delta t,$$

где v – скорость конвективного потока. Остальные обозначения приведены выше.

Уравнение теплового баланса

$$\Delta Q = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 + \Delta Q_{кон}.$$

После преобразований, показанных в п. 2.2, получим

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 T(\bar{x},t)}{\partial x^2} + c \cdot \rho \cdot v \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} = c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t}.$$

После предельного перехода $(\Delta x \to 0,\ \Delta t \to 0)$ получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial x}. \qquad (2.14)$$

Заметим, что уравнение (2.14) получено при $\Delta T > 0$, т. е. конвективный поток нагревает тело. Если $\Delta T < 0$, то в уравнении (2.14) конвективное слагаемое следует брать со знаком минус. Такая задача может быть поставлена, когда для поддержания пластового давления закачивается вода с температурой, меньшей, чем начальная пластовая.

Примечание. Роль каждого из механизмов (теплопроводного, конвективного) определяется величиной коэффициентов a^2 и v. Известно, например, что при прогреве нефтяных пластов теплоносителем основную роль играет конвективный перенос.

Для определения температурного поля без учёта потерь тепла в окружающие пласт породы, можно воспользоваться уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = v \cdot \frac{\partial T}{\partial x}. \qquad (2.15)$$

Это уравнение уже первого порядка. Оно не относится к параболическому типу, т. к. тип уравнения определяется с помощью коэффициентов при вторых производных (п. 1.3).

зически менее оправдано, т. к. вблизи поверхности температура будет меняться довольно резко. Тем не менее будем считать температуру в любом сечении постоянной.

Обозначим через S площадь поперечного сечения стержня, через P периметр поперечного сечения на отрезке $[x, x+\Delta x]$.

По закону Ньютона, количество тепла, выделяющегося (поступающего) через боковую поверхность, пропорционально площади поверхности, разности температур между телом и окружающей средой, времени и коэффициенту теплообмена (теплоотдачи) α.

$$\Delta Q_{бок} = \alpha \cdot \left(T(x,t) - T_0\right) \cdot S \cdot \Delta t = \alpha \cdot \left(T(x,t) - T_0\right) \cdot P \cdot \Delta x \cdot \Delta t. \qquad (2.11)$$

Здесь T_0 – температура окружающей среды, которая может быть не только постоянной, но и функцией x и t.

Однако наиболее важным практическим случаем является $T_0 - const$. При $T(x,t) - T_0 > 0$ происходит отток тепла в окружающую среду, $T(x,t) - T_0 < 0$ – приток тепла из окружающей среды.

Размерность $[\alpha] =$ *Вт/м*^{2}*·°С* в технической системе, $[\alpha] =$ *ккал/м*^{2}*· час·°С*, (1 *Вт* = 0,862 *ккал/час*).

Уравнение теплового баланса в этом случае будет

$$\Delta Q = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 - \Delta Q_{бок}. \qquad (2.12)$$

После подстановки слагаемых

$$c \cdot \rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot \Delta T = \lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 T(\bar{x},t)}{\partial x^2} \cdot \Delta t \cdot \Delta x - \alpha \cdot \left(T - T_0\right) \cdot P \cdot \Delta x \cdot \Delta t,$$

или

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \cdot \frac{\partial^2 T(\bar{x},t)}{\partial x^2} - \alpha \cdot \left(T - T_0\right) \cdot \frac{P}{c \cdot \rho \cdot S}.$$

После предельного перехода при $\Delta x \to 0,\ \Delta t \to 0$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\alpha \cdot P}{c \cdot \rho \cdot S} \cdot \left(T - T_0\right). \qquad (2.13)$$

2.5. Конвективный член в уравнении теплопроводности

До сих пор мы имели дело с теплопроводностью в однородных системах. Рассмотрим теперь задачу о перераспределении температуры с учётом как теп-

Согласно гипотезе Фурье, количество теплоты, проходящее в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности (поверхность, в каждой точке которой температура одинакова), *Вт/м*^{2}, называемое плотностью теплового потока, равна

$$\bar{q} = -\lambda \cdot grad\, T. \qquad (2.1)$$

Здесь T – температура в $°C$; λ – коэффициент теплопроводности (мера того, как хорошо материал проводит тепло), *Вт/м·°С*.

Если $T = T(x, y, z)$, то $grad\, T = \frac{\partial T}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\bar{k}$.

Для рассматриваемого одномерного случая $grad\, T = \frac{\partial T}{\partial x}\bar{i}$, поэтому $\bar{q} = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\bar{i}$.

Скалярная величина теплового потока (проекция плотности теплового потока на ось *Ox*) будет равна

$$q = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}. \qquad (2.2)$$

Многочисленные опыты подтвердили справедливость гипотезы Фурье. Поэтому уравнение (2.1), а для одномерного случая (2.2), является математической записью основного закона теплопроводности, который формулируется следующим образом: плотность теплового потока пропорциональна градиенту температуры.

Количество теплоты, *Дж*, проходящее через изотермическую поверхность площадью S за промежуток времени Δt, будет равно (одномерный случай)

$$\Delta Q = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot S \cdot \Delta t. \qquad (2.3)$$

Количество теплоты, *Вт*, проходящее в единицу времени через изотермическую поверхность площадью S, принято называть тепловым потоком, $\Phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot S$.

Выясним, почему ставится знак «–» в написанных формулах. Будем помнить, что теплота (обычно говорим «тепло») передаётся от более горячих частей тела к более холодным.

Из (2.1) следует, что вектор $grad\,T$ (направления наибольшего возрастания температуры) и вектор плотности теплового потока имеют противоположные направления. Для одномерного случая это означает, что если $\dfrac{\partial T(x,t_0)}{\partial x} > 0$, то тепловой поток будет направлен в сторону уменьшения x и наоборот (рис. 2.2).

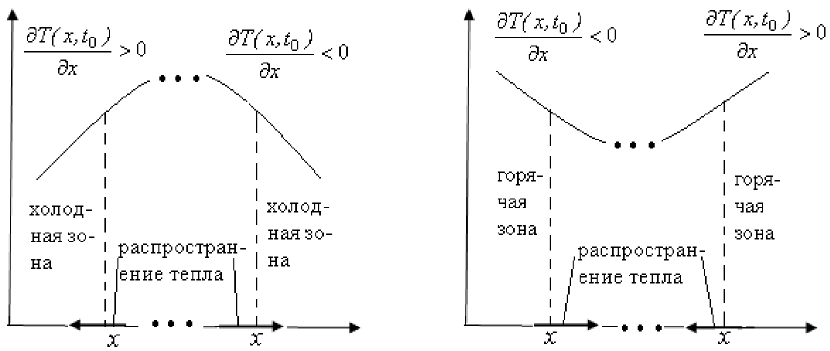


Рис. 2.2 – Иллюстрация закона Фурье

Аналогичную картину можно увидеть и для двумерного случая (на плоскости). Только в этом случае сечение стержня в точке x необходимо заменить изотермой (линия, на которой температура имеет одно и то же значение), производная по переменной x заменяется производной по направлению вектора $\bar{n}$, перпендикулярного к изотерме в любой точке (рис. 2.3).

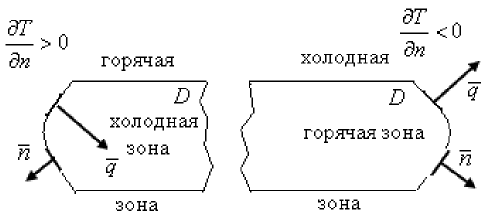


Рис. 2.3 – Иллюстрация закона Фурье для двумерного случая

Примечание. Здесь мы подробно рассмотрели закон Фурье для теплопередачи. Однако и другие физические явления тоже описываются подобными законами.

Полное изменение количества тепла на отрезке $[x, x+\Delta x]$ равно количеству тепла, прошедшего через границы, плюс количество тепла, образовавшегося внутри отрезка.

Уравнение теплового баланса (2.7) примет вид

$$\Delta Q = \Delta Q_x - \Delta Q_{x+\Delta x} + F(x,t)\cdot\Delta x\cdot\Delta t. \tag{2.9}$$

После преобразований, показанных в п. 2.2, получим

$$c\cdot\rho\cdot\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{S}\cdot F(x,t),$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q(x,t), \tag{2.10}$$

где $a^2 = \dfrac{\lambda}{c\cdot\rho}$, $q(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{c\cdot\rho\cdot S}$.

Уравнение (2.10) является уже неоднородным (нулевая функция не удовлетворяет этому уравнению). Появление дополнительного члена, естественно, усложняет решение задачи (сравните решение однородного и неоднородного ОДУ с постоянными коэффициентами).

2.4. Уравнение теплопроводности при теплообмене через боковую поверхность

Рассмотрим задачу теплопроводности в одномерном случае при условии теплообмена с внешней средой через боковую поверхность (рис. 2.5).

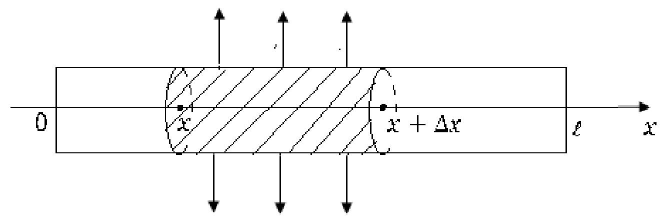


Рис. 2.5 – Теплопроводность при теплообмене через боковую поверхность

Такие задачи, например, возникают при определении температурного поля нефтяного пласта при тепловом воздействии с учётом теплопотерь через кровлю и подошву. Необходимо отметить, что в этом случае предположение постоянства температуры по любому сечению в каждый момент времени фичастиц. При выводе уравнения предполагалось, что коэффициент теплопроводности λ, удельная теплоёмкость (способность вещества запасать тепловую энергию) и плотность постоянны.

Строго говоря, составляющие коэффициента температуропроводности $(\lambda,\, c,\, \rho)$ могут зависеть как от температуры, так и от координаты. В этом случае уравнение (2.8) будет нелинейным

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a^2(x,T)\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right).$$

Представление решения такого уравнения в аналитической форме возможно лишь в исключительных случаях. Если допустить, что c и ρ – *const*, а только $\lambda=\lambda(T)$, то уравнение (2.8) примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{c\cdot\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right).$$

В этом случае уравнение теплопроводности принято называть квазилинейным («квази» – как будто, почти). Чаще всего, однако, λ очень слабо зависит от температуры, и этой нелинейностью можно пренебречь.

2.3. Уравнение теплопроводности при наличии внутреннего источника тепла

Предположим теперь дополнительно, что на некоторых участках или по всей длине стержня возникает или поглощается тепло. Например, через стержень проходит нагревающий кабель, в нефтяном пласте пробурена нагревающая обсаженная горизонтальная скважина. Отвлекаясь от конкретного физического смысла, можно сказать, что внутри стержня имеются тепловые источники или стоки. Выделение (или поглощение) тепла удобно характеризовать с помощью плотности тепловых источников (количество тепла (*Дж*), выделяющееся в единицу времени на единицу длины стержня).

Под плотностью тепловых источников понимают функцию $F(x,t)$ такую, когда за малый промежуток времени Δt на малом участке Δx выделяется количество тепла, равное $F(x,t)\cdot\Delta x\cdot\Delta t$ (при $F(x,t)<0$ тепло не выделяется, а поглощается).

Сама функция $F(x,t)$, которая может быть и постоянной величиной, называется мощностью (*Дж/м · с*) теплового источника или стока.

В этом случае закон сохранения количества тепла формулируется так.

Приведём примеры.

1. Теплопередача, $\bar{q}=-\lambda\cdot grad\,T$. Здесь λ – коэффициент теплопроводности, T – температура.

2. Движение несжимаемой жидкости в пористой среде по линейному закону фильтрации, $\bar{v}=-\dfrac{k}{\mu}\cdot grad\,P$. Здесь $\bar{v}$ – вектор скорости фильтрации; k – проницаемость; μ – абсолютная вязкость; P – давление.

3. Движение сжимаемой жидкости в пористой среде по линейному закону фильтрации, $\rho\bar{v}=-\chi\cdot grad\,P$. Здесь ρ – плотность жидкости; χ – коэффициент пьезопроводности; $\rho\bar{v}$ – вектор массовой скорости фильтрации.

4. Движение газа в пористой среде, $\rho\bar{v}=-\dfrac{\chi}{P_{атм}}\cdot grad\,P^2$. Здесь $P_{атм}$ – атмосферное давление; χ – коэффициент пьезопроводности.

5. Движение жидкой фазы газированной жидкости в пористой среде по линейному закону фильтрации, $\bar{v}_{ж}=-\dfrac{k}{\mu_{ж}}\cdot grad\,H$. Здесь $\bar{v}_{ж}$ – вектор скорости фильтрации для жидкой фазы; $\mu_{ж}$ – абсолютная вязкость жидкости; $H=\dfrac{1}{k}\int_0^P k_{ж}dP$ – функция давления; $k_{ж}$ – относительная проницаемость жидкости; k – проницаемость (эффективная) жидкости.

6. Электрический ток, $\bar{I}=-\sigma\cdot grad\,U$. Здесь $\bar{I}$ – вектор силы тока; σ – удельная проводимость; U – потенциал (напряжение).

7. Диффузия (согласно закону Фика), $\overline{W}=-D\cdot grad\,C$. Здесь $\overline{W}$ – плотность диффузионного потока; D – коэффициент диффузии; C – концентрация вещества.

2.2. Вывод уравнения теплопроводности

Рассмотрим однородный стержень длины L, относительно которого сделаны следующие предположения (рис. 2.4):

1) стержень выполнен из однородного теплопроводного материала;

2) боковая поверхность стержня теплоизолирована (тепло может распространяться только вдоль оси *Ox*);

3) стержень тонкий; это значит, что температура всех точек в каждом поперечном сечении стержня постоянна.

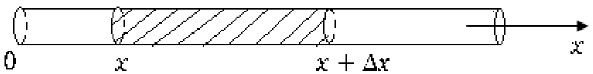


Рис. 2.4 – Тонкий теплопродящий стержень

Рассмотрим часть стержня на отрезке $[x, x+\Delta x]$. Необходимым условием распространения теплоты является неравномерность распределения температуры в рассматриваемой среде. Поэтому для передачи теплоты теплопроводностью необходимо <u>неравенство нулю</u> температурного градиента в различных точках тела (для рассматриваемого одномерного случая $\frac{\partial T}{\partial x} \neq 0$).

Если $T = T(x, t)$ – переменная температура, то $\frac{\partial T}{\partial x}$ – скорость изменения температуры в направлении оси Ox (наклон температурной кривой); $\frac{\partial T}{\partial t}$ – скорость изменения во времени.

Количество тепла, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на ΔT на отрезке $[x, x+\Delta x]$, равно

$$\Delta Q = c \cdot \rho \cdot V \cdot \Delta T = c \cdot \rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot \Delta T, \tag{2.4}$$

где c – теплоемкость при постоянном объеме (*Дж/кг* $\cdot°C$, или *кал/г* $\cdot°C$ в системе СГС, 1 *кал* = 4,19 *Дж*); ρ – плотность (*кг/м*^{3}); $V = S \cdot \Delta x$ – объем (*м*^{3}); ΔT – приращение температуры $(°C)$. Размерность ΔQ в *Дж* или в *кал* в системе СГС.

Количества тепла, протекающее через поперечное сечение абсциссой x за время Δt,

$$\Delta Q_{ж} = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \cdot \Delta t. \tag{2.5}$$

Размерность λ – *Вт/м* $\cdot°C$ или в системе СГС – *кал/см· с* $\cdot°C$ (1 *Вт* = 0,862 *ккал/ч* или 1 *ккал/ч* = 1,16 *Вт*).

Количество тепла, протекающее через сечение абсциссой $x+\Delta x$ за время Δt,

$$\Delta Q_{x+\Delta x} = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T(x+\Delta x,t)}{\partial x} \cdot \Delta t. \tag{2.6}$$

Согласно закону сохранения тепловой энергии, изменение количества тепла на отрезке $[x, x+\Delta x]$ равно полному количеству тепла, прошедшего через границы

$$\Delta Q = \Delta Q_x - \Delta Q_{x+\Delta x}.$$

$$\begin{aligned} c \cdot \rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot \Delta T &= -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \cdot \Delta t + \lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T(x+\Delta x,t)}{\partial x} \cdot \Delta t = \\ &= \lambda \cdot S \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{\partial T(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) = \lambda \cdot S \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial^2 T(\bar{x},t)}{\partial x^2} \cdot \Delta x. \end{aligned} \tag{2.7}$$

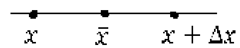
<u>Примечание.</u> При переходе к производной второго порядка применена формула Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \text{ где } a < \xi < b.$$

Обобщение этой формулы: $f'(b) - f'(a) = f''(\xi)(b-a)$.

В данном случае

$$\frac{\partial T(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 T(\bar{x},t)}{\partial x^2}(x+\Delta x - x) = \frac{\partial^2 T(\bar{x},t)}{\partial x^2} \cdot \Delta x,$$



,

при $\Delta x \to 0$ $\bar{x} \to x$.

В результате, (2.7) принимает вид $\frac{c \cdot \rho}{\lambda} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\partial^2 T(\bar{x},t)}{\partial x^2}$.

В последнем равенстве переходим к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$.

Получим

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad \frac{\lambda}{c \cdot \rho} = a^2.$$

a^2 принято называть коэффициентом температуропроводности, *м*^{2}*/с*.

Уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{2.8}$$

Это уравнение является простейшим в теории теплопроводности, т. к. учитывает только перенос энергии от более нагретых участков к менее нагретым в результате теплового движения и взаимодействия составляющих его где

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot sin\frac{n\pi}{L}xdx,\ n=1, 2,... \tag{7.2}$$

Эту пару формул можно интерпретировать так: если найден коэффициент b_n (зависит только от n), то подстановкой b_n в (7.1) находим функцию $f(x)$.

На языке интегральных преобразований: по формуле (7.2) для функции $f(x)$ на $[0, L]$ нашли её интегральный образ с помощью ядра $\frac{2}{L}sin\frac{n\pi}{L}x$, т. е. провели прямое преобразование. Тогда с помощью обратного преобразования (7.1) определяется сама функция.

Используя обозначения, принятые в интегральных преобразованиях, запишем

$$\begin{cases} S(f) = S_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{L}xdx & \begin{pmatrix}\text{прямое конечное}\\ \text{синус-преобразование}\end{pmatrix}, \\ S^{-1}(S_n) = f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x & \begin{pmatrix}\text{обратное конечное}\\ \text{синус-преобразование}\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{7.3}$$

Такие же рассуждения будут при конечном косинус-преобразовании Фурье.

Если чётная функция задана на отрезке $[0, L]$, то её ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,cos\frac{n\pi}{L}x, \tag{7.4}$$

где

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot cos\frac{n\pi}{L}xdx,\ n=0, 1, 2,... \tag{7.5}$$

Здесь (7.5) есть прямое конечное косинус-преобразование с ядром $\frac{2}{L}cos\frac{n\pi}{L}x$, а (7.4) – обратное преобразование. При этом a_0 есть (7.5) при $n=0$.

Используя обозначения, принятые в конечных интегральных преобразованиях, запишем

$$\begin{cases} C(f) = C_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cdot\cos\frac{n\pi}{L}xdx & \begin{pmatrix}\text{прямое конечное}\\ \text{косинус-преобразование}\end{pmatrix}, \\ C^{-1}(C_n) = f(x) = \dfrac{C_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} C_n\cdot\cos\frac{n\pi}{L}x & \begin{pmatrix}\text{обратное конечное}\\ \text{косинус-преобразование}\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{7.6}$$

или

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\alpha}{\lambda}\left(T_{x=0} - T_0\right), \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = -\frac{\alpha}{\lambda}\left(T_{x=L} - T_0\right). \tag{3.1}$$

Для случая более высокой размерности (задача на плоскости или в пространстве) получаются аналогичные граничные условия.

Примечание 1. Граничные условия первого рода можно рассматривать как частный случай граничных условий третьего рода. Запишем первое условие (3.1) в виде $\frac{\lambda}{\alpha}\cdot\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = T_{x=0} - T_0$. *При больших* α $(\alpha\to\infty)$ *следует, что* $T_{x=0} = T_0$.

Примечание 2. Если в условиях (3.1) положить $\alpha = 0$, *то получим* $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. *Что совпадает со случаем теплоизоляции конца стержня, т. е. частным случаем граничных условий второго рода.*

Подводя итоги сказанному в п. 3.1 и 3.2, можем следующим образом сформулировать математическую задачу теплопроводности для однородного стержня теплоизолированной боковой поверхностью без тепловых источников.

Отыскивается температура $T = T(x,t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

начальному условию

$$T_{t=0} = f(x)$$

и граничным условиям

$$\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha_1\left(T_{x=0} - T_0\right),$$

$$-\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=Д} = \alpha_2\left(T_{x=L} - T_0\right)$$

(или их частные случаи, изложенные в п. 3.2.1 и 3.2.2).

В теории дифференциальных уравнений с частными производными доказывается, что эта задача всегда имеет единственное решение при достаточно общих предположениях относительно заданных функций $f(x)$, $T_0(t)$, и $\alpha(t)$.

При постановке задачи, разумеется, можно рассматривать любую комбинацию краевых условий на разных концах стержня.

Приведём <u>пример.</u> Изучается динамика температуры в единичном квадрате. Начальная температура $T_{t=0} = T(x, y, 0)$ (рис. 3.3).

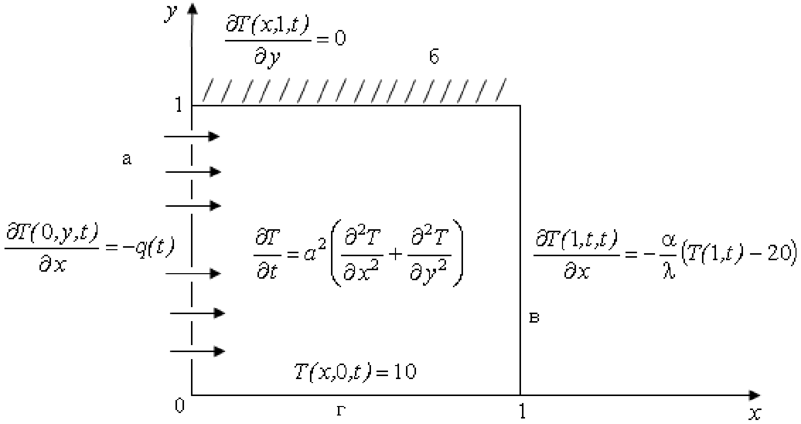


Рис. 3.3 – Типичные граничные условия для двумерной задачи:
а – тепловой поток $q(t)$ через границу; б – теплоизорованная граница;
в – температура окружающей среды равна $20°C$; г – температура поддерживается равной $10°C$

3.3. Начальные и граничные условия для уравнения пьезопроводности

Продуктивный пласт или выделенную из него часть (элемент пласта) можно рассматривать как некоторую область пространства, ограниченную поверхностями – границами. Границы могут быть непроницаемыми для флюидов (например кровля и подошва). Граничной также является поверхность, по которой пласт сообщается с областью питания (с дневной поверхностью, водоносным пластом, водоёмами). Это так называемый контур питания. Стенка скважины тоже является границей (внутренней) пласта.

Уравнения теплопроводности и пьезопроводности однотипны с математической точки зрения. Следовательно, однотипными будут для них и начальные, и граничные условия. Остаётся выяснить физический смысл этих условий применительно к задачам нефтедобычи.

Начальное условие заключается в задании искомой функции во всей области в некоторый момент времени, принимаемый за начальный. Если искомой функцией является давление, то начальное условие принимает вид

7. Интегральные преобразования Фурье

7.1. Понятие метода интегральных преобразований

При решении дифференциальных уравнений с частными производными всегда стараются каким-либо способом уменьшить число независимых переменных. Один из методов, с которым предстоит познакомиться, – метод интегральных преобразований. Он позволяет уменьшить число независимых переменных (по которым производится дифференцирование), преобразуя некоторые переменные в параметры (по которым уже нет дифференцирования).

<u>Интегральным</u> называют преобразование, которое для функции $f(x)$ ставит в соответствие новую функцию по формуле

$$F(s) = \int_a^b K(s,x) f(x) dx .$$

Функция $K(s,x)$ называется <u>ядром преобразования.</u> Это основной элемент, отличающий одно преобразование от другого. Обычно ядро выбирают так, чтобы преобразование обладало определёнными заданными свойствами. Пределы интегрирования также зависят от вида преобразования. Если a и b – конечные величины, то преобразование называется конечным интегральным преобразованием.

Существует общая теория интегральных преобразований. Мы же остановимся на конкретном – преобразовании Фурье.

Цель всякого преобразования – упростить исходную задачу. Потом решается эта преобразованная задача. Применяя обратное преобразование, получают решение исходной задачи.

Таким образом, с каждым <u>прямым преобразованием</u> связано <u>обратное преобразование</u>, которое должно восстановить первоначальную функцию из преобразованной, т. е. всегда возникает <u>пара взаимно обратных преобразований.</u>

7.2. Конечные синус- и косинус- преобразования Фурье

Конечное синус-преобразование Фурье базируется на формулах разложения нечётной функции в ряд Фурье (6.6) и (6.7).

Если <u>нечётная</u> функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, L]$, то её ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x , \qquad (7.1)$$

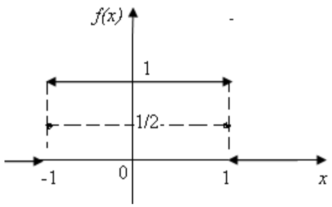
Если функция $f(x)$ задана на полупрямой $[0, \infty)$, то её можно представить в виде интеграла Фурье по косинусам (6.13) или по синусам (6.15), если продолжить в интервале $(-\infty, 0)$, соответственно, чётным или нечётным образом. При этом коэффициенты вычисляются по формулам (6.12) и (6.14).

Пример. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}1 \ \text{при} \ |x|<1,\\ \frac{1}{2} \ \text{при} \ |x|=1,\\ 0 \ \text{при} \ |x|>1.\end{cases}$$

Решение

1. Функция определена на всей числовой оси $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-1}^{1}1\cdot dx=2$ – сходится.



Фурье – образ для данной функции существует.

2. Функция $f(x)$ чётная, следовательно, на основании (6.13)

$$f(x)=\int\limits_0^{\infty} a(\alpha)\cdot \cos \alpha x \, d\alpha,$$

где $a(\alpha)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\alpha t dt=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{1}\cos\alpha t dt=\dfrac{2\sin\alpha}{\pi\cdot\alpha}$,

поэтому $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\cos\alpha x \, d\alpha.$

$P_{t=0}=P(x,y,z)$, т. е. в начальный момент задаётся распределение давления во всем пласте.

Если в начальный момент пласт невозмущён, то начальное условие примет вид $P_{t=0}=P_0-const$.

<u>Примечание.</u> Условие постоянства давления справедливо, если не учитывается сила тяжести. Если учитывать силу тяжести, то распределение давления будет гидростатическим, т. е. $P_{t=0}=P_0+\rho qh$, где P_0 – давление на кровле пласта; h – толщина пласта.

Граничные (краевые) условия задаются на границах пласта. Число граничных условий должно быть равно порядку дифференциального уравнения.

Возможны следующие граничные условия:

1. <u>На внешней границе *Г*</u>:

а) постоянное давление $P(\Gamma,t)=P_K$, т. е. граница является контуром питания (для одномерного случая $P_{x=0}=P_1$; $P_{x=L}=P_2$);

б) постоянный переток через границу при выполнении закона Дарси (примечание в 2.1)

$$v_n=-\frac{k}{\mu}\cdot\frac{\partial P}{\partial n}=const,$$

где n – нормаль к границе *Г*.

Откуда следует, что $\dfrac{\partial P(\Gamma,t)}{\partial n}=-\dfrac{v_n\cdot\mu}{k}-const$;

в) переменный приток через границу $\dfrac{\partial P(\Gamma,t)}{\partial n}=\varphi(t)$;

г) внешняя граница замкнутая (поверхность сброса) $\dfrac{\partial P}{\partial n}=0$. Здесь n – нормаль к границе *Г*;

д) «бесконечный» по проступанию пласт при прямолинейно-параллельной фильтрации $P(x,y)_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}=P_K-const$.

2. <u>На внутренней границе</u> (при плоскорадиальной фильтрации):

а) постоянное давление на забое скважины радиусом r_c

$$P(r_c,t)=P_c-const;$$

б) переменное давление на забое скважин

$$P(r_c,t)=P_c(t);$$

в) постоянный дебит при выполнении закона Дарси

$$Q=\frac{k}{\mu}\cdot\frac{\partial P}{\partial r}\cdot 2\pi r\cdot h-const \text{ при } r=r_c \text{ или } \left.\frac{\partial P}{\partial r}\right|_{r=r_c}=\frac{Q\cdot\mu}{k\cdot 2\pi r_c\cdot h}-const;$$

г) переменный дебит $\left.\frac{\partial P}{\partial r}\right|_{r=r_c}=\varphi(t)$;

д) отключение скважины $\left.\frac{\partial P}{\partial r}\right|_{r=r_c}=0$.

3.4. Преобразование неоднородных граничных условий в однородные

Граничные условия к уравнениям параболического типа, изложенные выше, с точки зрения математики, представляют алгебраические или дифференциальные уравнения. Различают два типа граничных условий: однородные и неоднородные.

В общем случае неоднородные граничные условия можно написать в виде

$$\begin{aligned}&\alpha_1\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}+\beta_1 u(0,t)=q_1(t),\\&\alpha_2\frac{\partial u(L,t)}{\partial x}+\beta_2 u(L,t)=q_2(t),\\&где\ \ \alpha_1^2+\beta_1^2\neq 0,\ \ \alpha_2^2+\beta_2^2\neq 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Последние условия означают, что α и β одновременно не обращаются в нуль.

Если $q_1(t)=0$, $q_2(t)=0$ при любых t, то граничные условия называются однородными:

$$\begin{aligned}&\alpha_1\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}+\beta_1 u(0,t)=0,\\&\alpha_2\frac{\partial u(L,t)}{\partial x}+\beta_2 u(L,t)=0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Примечание. В данном случае терминология «однородные условия» не связана с понятием однородных функций. Как известно, однородными функциями для двух переменных называются такие функции, для которых выполняется условие $f(\lambda x;\lambda y)=\lambda^k\cdot f(x,y)$. Здесь однородность необходимо понимать так: нулевая функция удовлетворяет уравнениям (3.3).

Как будет показано ниже, однородные условия являются более предпочтительными при решении УЧП, чем неоднородные. Более того, один из мощных методов (метод разделения переменных) можно применять только при однородных граничных условиях.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)(\cos\alpha t\cdot\cos\alpha x+\sin\alpha t\cdot\sin\alpha x)dt=$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt\right)\cos\alpha x d\alpha+\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt\right)\sin\alpha x d\alpha.\tag{6.9}$$

Если обозначить через

$$a(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt \text{ и } b(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt,\tag{6.10}$$

то (6.9) примет вид

$$f(x)=\int_0^{\infty}a(\alpha)\cdot\cos\alpha x\,d\alpha+\int_0^{\infty}b(\alpha)\cdot\sin\alpha x\,d\alpha.\tag{6.11}$$

Формулы (6.11) и (6.10) имеют общее с рядом и коэффициентами Фурье. В самом деле, формула (6.11) означает, что функция $f(x)$ разложена по синусам и косинусам, но только не в ряд по n $(n=0,1,2,...)$, а в интеграл по переменной α $(\alpha\in(0,\infty))$. Коэффициенты Фурье вычислялись интегрированием по отрезку $[-L,L]$, а коэффициенты $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ находятся через несобственные интегралы от $-\infty$ до $+\infty$.

Следовательно, интеграл Фурье – аналог разложения функции в ряд Фурье, если функция $f(x)$ непериодическая.

Для чётных и нечётных функций интеграл Фурье (так же, как и ряд Фурье) можно вычислять более просто. Если $f(x)$ – чётная функция, то

$$\begin{aligned}&a(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt;\\&b(\alpha)=0;\end{aligned}\tag{6.12}$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}a(\alpha)\cdot\cos\alpha x\,d\alpha.\tag{6.13}$$

Если $f(x)$ – нечётная функция, то

$$\begin{aligned}&a(\alpha)=0;\\&b(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt;\end{aligned}\tag{6.14}$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}b(\alpha)\cdot\sin\alpha x\,d\alpha.\tag{6.15}$$

6.2. Интеграл Фурье

Если функция $f(x)$ задана на $(-\infty,+\infty)$ и непериодическая, то она не разлагается в ряд Фурье. Однако для некоторых таких функций можно построить аналог ряда Фурье.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей прямой. Пусть $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = A$ – число.

Если дополнительно на каждом конечном отрезке $[-L, L]$ функция имеет конечное число точек экстремума, то она будет разлагаться в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x,$$

где $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt$, $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cdot\cos\frac{n\pi}{L}tdt$, $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cdot\sin\frac{n\pi}{L}tdt$.

В формулах коэффициентов Фурье переменную интегрирования специально обозначают буквой t, чтобы при подстановке этих выражений в ряд Фурье не путать переменную x с переменной интегрирования.

После подстановки получим

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\left(\cos\frac{n\pi}{L}t\cdot\cos\frac{n\pi}{L}x + \sin\frac{n\pi}{L}t\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cdot\cos\frac{n\pi}{L}(t-x)dt. \qquad (6.8)$$

Исследуем вопрос о том, какой вид примет формула (6.8) при переходе к пределу при $L\to\infty$.

$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt = 0$, т. к. интеграл по условию сходится, а $\frac{1}{L}\to 0$ при $L\to\infty$.

Второе слагаемое (6.8) при $L\to\infty$ принимает вид $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)dt$

(это не совсем очевидно, но доказательство приводить не будем).

Интеграл, стоящий в правой части (6.9), называется <u>интегралом Фурье</u>. Равенство выполняется при $x\in R$. Таким образом, непериодическую функцию можно представить интегралом Фурье, который часто представляют в другой форме:

3.4.1. Граничные условия первого рода.
На границах заданы значения искомой функции (постоянные)

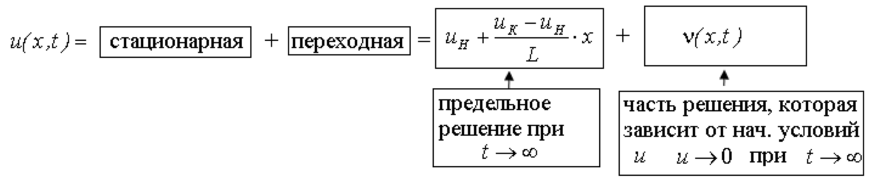
Рассмотрим задачу о распространении тепла (давления) в одномерном случае. На границах заданы постоянные u_H и u_K, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<L, \quad 0<t<\infty; \qquad (3.4)$$

$$\begin{cases} u(0,t) = u_H, \\ u(L,t) = u_K; \end{cases} \qquad (3.5)$$

$$u(x,o) = \varphi(x), \quad 0\le x\le L. \qquad (3.6)$$

Граничные условия (3.5) неоднородные. Как будет показано в разделе 8, мы не можем решать поставленную задачу методом разделения переменных. Однако очевидно, что при $t\to\infty$, решение этой задачи стремится к стационарному, которое линейно изменяется (вдоль оси Ox) от u_H и u_K (рис. 3.4). Другими словами, разумно предположить, что искомую функцию в этой задаче можно представить в виде суммы двух слагаемых:



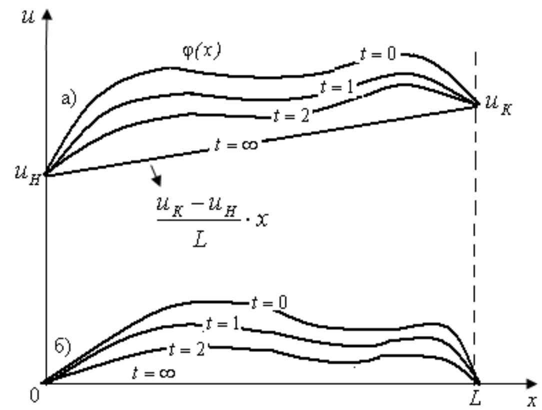


Рис. 3.4 – Графическое изображение решения задачи (3.4)-(3.6):
а) – начальная температура $\varphi(x)$; б) – переходная температура (нестационарная часть решение)

Итак, искомую функцию представим в виде

$$u(x,t) = u_H + \frac{u_K - u_H}{L} \cdot x + \nu(x,t). \qquad (3.7)$$

Подчиним (3.7) краевым условиям (3.5) и (3.6)

$$x = 0: \quad u_H = u_H + \nu(0,x) \Rightarrow \nu_{x=0} = 0;$$

$$x = L: \quad u_K = u_H + u_K - u_H + \nu(L,t) \Rightarrow \nu_{x=L} = 0;$$

$$t = 0: \varphi(x) = u_H + \frac{u_K - u_H}{L} \cdot x + \nu(x,0) \Rightarrow \nu_{t=0} = \varphi(x) - \left(u_H + \frac{u_K - u_H}{L} \cdot x \right) = \overline{\varphi}(x).$$

Подставив (3.7) в уравнение (3.4), получим

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad (3.8)$$

при условиях

$$\begin{cases} \nu_{x=0} = 0, \\ \nu_{x=L} = 0, \end{cases} \qquad (3.9)$$

$$\nu_{t=0} = \varphi(x) - \left(u_H + \frac{u_K - u_H}{L} \cdot x \right) = \overline{\varphi}(x). \qquad (3.10)$$

Эта задача не только с однородным уравнением, но, к счастью, и с однородными граничными условиями. Эти факторы позволят ниже решить это уравнение методом разделения переменных.

3.4.2. Граничные условия первого рода. На границах заданы функции времени

Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (3.11)$$

$$\begin{cases} u_{x=0} = q_1(t), \\ u_{x=L} = q_2(t), \end{cases} \qquad (3.12)$$

$$u_{t=0} = \varphi(x). \qquad (3.13)$$

Для преобразования граничных условий в однородные рассмотрим функцию

$$u(x,t) = \left(q_1(t) + \frac{q_2(t) - q_1(t)}{L} \cdot x \right) + \nu(x,t). \qquad (3.14)$$

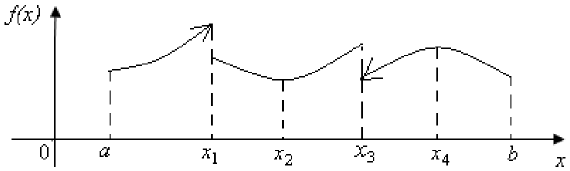


Рис. 6.1 – Функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$

<u>Теорема Дирихле</u>. Если $f(x)$ периодическая функция периода $T = 2L$, удовлетворяющая условиям Дирихле на отрезке $[-L, L]$ разлагается в ряд Фурье, то в каждой точке непрерывности сумма ряда Фурье равна значению функции. В точках разрыва сумма ряда равна среднему значению пределов слева и справа.

<u>Пример.</u> Функция $f(x) = x$, $f(x + 2L) = f(x)$.

Эта функция непрерывна при $x \in [-L, L]$, нечетная. Порождает ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x, \text{ где } b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x \cdot \sin\frac{n\pi}{L}x dx = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2L}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Подставим коэффициент b_n в ряд

$$f(x) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin\frac{n\pi}{L}x =$$

$$= \frac{2L}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{L}x - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{L}x + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{L}x + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \sin\frac{n\pi}{L}x + \ldots \right).$$

Здесь после функции ставим не знак равенства, а знак соответствия, т. к. функция имеет точки разрыва, а в этих точках сумма ряда равна не значению функции, а нулю (рис. 6.2).

Каждое слагаемое принято называть <u>гармоникой</u>. Частота каждой следующей гармоники выше предыдущей. Частоты всех гармоник кратны основной частоте, период которой совпадает с периодом функции $f(x)$.

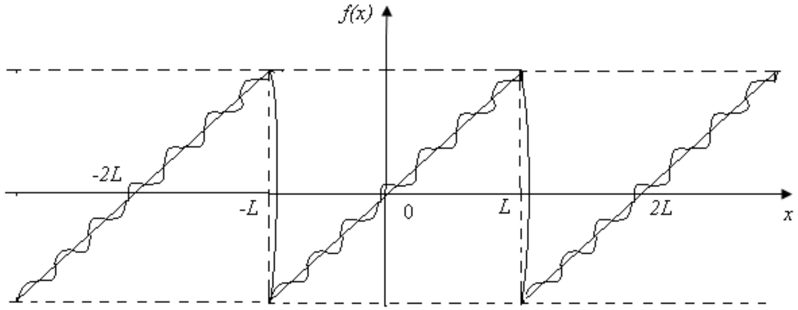


Рис. 6.2 – Разложение функции $f(x) = x$ в ряд Фурье

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx\,,\; a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot cos\frac{n\pi}{L}xdx\,,\; b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot sin\frac{n\pi}{L}xdx\,, \qquad (6.3)$$

$n = 1, 2, \ldots$.

При этом говорят, что ряд (6.2) порождён функцией $f(x)$, а коэффициенты называются коэффициентами Фурье (Эйлера – Фурье).

Часто рассматривают функцию $f(x)$ периода $T = 2\pi$. Формулы (6.2) и (6.3) легко получить заменой L на π.

Для чётных функций ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, cos\frac{n\pi}{L}x\,, \qquad (6.4)$$

где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx\,,\quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot cos\frac{n\pi}{L}xdx\,,\quad n = 1, 2, \ldots \qquad (6.5)$$

Для нечётных функций ряд содержит только синусы

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sin\frac{n\pi}{L}x\,, \qquad (6.6)$$

где

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot sin\frac{n\pi}{L}xdx\,,\qquad n = 1, 2, \ldots . \qquad (6.7)$$

Важное значение имеют вопросы о том, при каких x ряд Фурье сходится и в каком случае сумма ряда в точке x равна значению функции $f(x)$, порождающей этот ряд. Ответы на этот вопрос даёт теорема Дирихле.

Функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ удовлетворяет условиям Дирихле, если:

1) $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ непрерывна или имеет на этом отрезке конечное число точек разрыва 1-го рода (рис. 6.1);

2) в каждом интервале непрерывности $f(x)$ монотонна, либо имеет на этом интервале конечное число экстремума.

Например, функция, изображенная на рис. 6.1, удовлетворяет условиям Дирихле.

Нетрудно заметить, что подстановка условий (3.12) приводит к однородным граничным условиям для функции $\nu(x,t)$.

Граничное условие принимает вид

$$\nu_{t=0} = \varphi(x) - \left(q_1(0) + \frac{q_2(0) - q_1(0)}{L}\cdot x\right) = \overline{\varphi}(x).$$

Подставим (3.14) в уравнение (3.11):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = q_1{}'(t) + \frac{q_2{}'(t) - q_1{}'(t)}{L}\cdot x + \frac{\partial \nu}{\partial t}\,;\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}.$$

Уравнение (3.11) принимает вид

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + q_1{}'(t) + \frac{q_2{}'(t) - q_1{}'(t)}{L}\cdot x \qquad (3.15)$$

при условиях

$$\nu_{x=0} = 0\,,\ \nu_{x=L} = 0\,, \qquad (3.16)$$

$$\nu_{t=0} = \varphi(x) - q_1(0) - \frac{q_2(0) - q_1(0)}{L}\cdot x = \overline{\varphi}(x). \qquad (3.17)$$

Полученная задача с однородными граничными условиями, но, к сожалению, уравнение стало неоднородным. Метод разделения переменных здесь не даёт результата. Но существуют другие методы для решения и таких уравнений.

3.4.3. Комбинированные граничные условия

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\quad 0 < x < L\,,\quad 0 < t < \infty\,; \qquad (3.18)$$

$$u_{x=0} = q_1(t)\,,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = q_2(t)\,; \qquad (3.19)$$

$$u_{t=0} = \varphi(x). \qquad (3.20)$$

Для того чтобы граничные условия преобразовать в нулевые, рассмотрим функцию

$$u(x,t) = A(t)\cdot\left(1 - \frac{x}{L}\right) + B(t)\cdot\frac{x}{L} + \nu(x,t). \qquad (3.21)$$

Функции $A(t)$ и $B(t)$ необходимо выбрать такими, чтобы «квазистационарная» часть решения (3.21)

$$S(x,t) = A(t)\cdot\left(1-\frac{x}{L}\right) + B(t)\cdot\frac{x}{L} \qquad (3.22)$$

удовлетворяла граничным условиям (3.19).

В этом случае функция $\nu(x,t)$ будет удовлетворять нулевым граничным условиям

$$x=0: \quad q_1(t) = A(t),$$

$$x=L: \quad q_2(t) = -\frac{1}{L}A(t) + \frac{1}{L}B(t).$$

Из этой системы находим $A(t) = q_1(t)$, $B(t) = q_1(t) + Lq_2(t)$.

Следовательно,

$$u(x,t) = q_1(t)\cdot\left(1-\frac{x}{L}\right) + \frac{q_1(t)+L\cdot q_2(t)}{L} + \nu(x,t).$$

Подставим полученное выражение $u(x,t)$ в уравнение (3.18)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \nu}{\partial t}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}.$$

Получили новую задачу для неизвестной функции $\nu(x,t)$:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{\partial S}{\partial t}, \qquad (3.23)$$

$$\nu_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \nu}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, \qquad (3.24)$$

$$\nu_{t=0} = \varphi(x) - S(x,0). \qquad (3.25)$$

Теперь задача имеет нулевые граничные условия, но, как и в предыдущем случае, уравнение (3.23) неоднородное.

<u>Примечание.</u> Для граничных условий вида $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = q_1(t), \quad u_{x=L} = q_2(t)$ *квазистационарную часть необходимо искать в виде*

$$S(x,t) = A(t)\cdot\frac{x}{L} + B(t)\cdot\left(1-\frac{x}{L}\right).$$

Изложенный в этом пункте метод приводит к следующей задаче:

$$u(x,t) = \frac{4Lq_1(t)+q_2(t)}{3}\cdot\frac{x}{L} + \frac{L\cdot q_1(t)+L\cdot q_2(t)}{3}\cdot\left(1-\frac{x}{L}\right) + \nu(x,t).$$

Чтобы убедиться в этом, надо вычислить интегралы

1. $\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot dx = 2\pi$, поэтому $\|1\| = \sqrt{2\pi}$.

2. $\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\, dx = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$.

3. $\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\, dx = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$.

4. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cdot\cos mx\, dx = 0$ при $n \ne m$ и $n = m$.

5. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cdot\sin mx\, dx = 0$ при $n \ne m$.

Если $m = n$, то $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi$, поэтому $\|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$.

6. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cdot\cos mx\, dx = 0$ при $n \ne m$ $\left(n, m = 0, 1, 2, \ldots\right)$.

Если $m = n$, то $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi$, поэтому $\|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$.

Таким образом, доказано, что система функций (6.1) на отрезке $[-\pi, \pi]$ ортогональная.

Примерами ортогональных функций являются:

1) $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots \cos nx, \ldots\}$ на отрезке $[0, \pi]$;

2) $\{1, \sin\frac{\pi}{L}x, \cos\frac{\pi}{L}x, \sin\frac{2\pi}{L}x, \cos\frac{2\pi}{L}x, \ldots \sin\frac{n\pi}{L}x, \cos\frac{n\pi}{L}x, \ldots\}$ на отрезке $[-L, L]$;

3) $\{1, \cos\frac{\pi}{L}x, \cos\frac{2\pi}{L}x, \ldots \cos\frac{n\pi}{L}x, \ldots\}$ на отрезке $[0, L]$;

4) $\{\sin\frac{\pi}{L}x, \sin\frac{2\pi}{L}x, \ldots \sin\frac{n\pi}{L}x \ldots\}$ на отрезке $[0, L]$.

<u>Рядом Фурье</u> функции $f(x)$, имеющим период $T = 2L$, называется ряд вида

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x, \qquad (6.2)$$

в котором коэффициенты вычисляются по формулам

6. Ряды Фурье. Интеграл Фурье

6.1. Ряды Фурье

В краткой форме освежим знания, которые Вы получили при изучении раздела «Ряды Фурье».

Ряд Фурье является частным случаем функциональных рядов

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),$$

где $u_1(x), u_2(x)\ldots u_n(x)\ldots$ – функции, зависящие от одной переменной x или от нескольких переменных (тогда через x обозначают точку в пространстве $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. В дальнейшем мы чаще всего будем использовать функции двух переменных.

В теории тригонометрических рядов рассматриваются ортогональные системы функций.

<u>Две функции</u> $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются <u>ортогональными</u> на отрезке $[a, b]$, если $\int_a^b \varphi(x)\cdot\psi(x)dx=0$.

При этом предполагается, что $\int_a^b \varphi^2(x)dx\neq 0$ и $\int_a^b \psi^2(x)dx\neq 0$.

<u>Система функций</u> $\varphi_n(x)$, $n=0, 1, 2,\ldots$ <u>ортогональна</u> на отрезке $[a, b]$, если $\int_a^b \varphi_n(x)\cdot\varphi_m(x)dx=0$ при $n\neq m$ $(n,m=0,1,2,\ldots)$ и $\int_a^b \varphi_n{}^2(x)dx\neq 0$ при $n=0,1,2,\ldots$.

Число $\sqrt{\int_a^b \varphi_n{}^2(x)dx}$ называется <u>нормой</u> функции $\varphi_n(x)$ и обозначается $\|\varphi_n(x)\|$, т. е. $\sqrt{\int_a^b \varphi_n{}^2(x)dx}=\|\varphi_n(x)\|$.

Примером ортогональной системы функций служит тригонометрическая система

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \ldots \sin nx, \cos nx, \ldots \qquad (6.1)$$

на отрезке $[-\pi,\pi]$.

4. Преобразование сложных уравнений к простому виду

В разделе 2 были получены уравнения параболического типа с учётом теплопроводности, конвекции, теплообмена через боковую поверхность, а также при наличии внутреннего источника тепла. Каждый из факторов добавляет дополнительное слагаемое, т. е. усложняет уравнение, а, следовательно, и его решение.

Простейшим является уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \qquad (4.1)$$

Покажем, что иногда вместо того, чтобы решать более сложное уравнение «в лоб», лучше преобразовать его к более простому уравнению, решение которого проще или даже известно.

4.1. Преобразование задачи с теплообменом через боковую поверхность к задаче с теплоизолированной поверхностью

Рассмотрим уравнение (2.13), полученное в п. 2.4,

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\frac{\alpha\cdot P}{c\cdot\rho\cdot S}\cdot\left(T-T_0\right),\quad 0<x<L,\quad 0<t<\infty,\quad T_0-const. \qquad (4.2)$$

При граничных условиях

$$T(0,t)=T_{x=0}=T_0,\qquad (4.3)$$
$$T(L,t)=T_{x=L}=T_0$$

и начальном условии

$$T(x,0)=T_{t=0}=\varphi(x). \qquad (4.4)$$

Обозначим $\dfrac{\alpha\cdot P}{c\cdot\rho\cdot S}=\beta-const$.

Тогда (4.2) запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\beta\cdot\left(T-T_0\right). \qquad (4.5)$$

<u>1 шаг.</u> Сделаем замену $T-T_0=u(x,t)=u$, или $T=u+T_0$.

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial(u+T_0)}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t};\qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial^2(u+T_0)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Здесь использовали известные свойства производных.

Уравнение (4.5) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \cdot u. \tag{4.6}$$

Пересчитаем краевые (начальное и граничные) условия:

$$\begin{aligned} u\big|_{x=0} &= T_{x=0} - T_0 = T_0 - T_0 = 0; \\ u\big|_{x=L} &= T_{x=L} - T_0 = T_0 - T_0 = 0; \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$u_{t=0} = T_{t=0} - T_0 = \varphi(x) - T_0. \tag{4.8}$$

<u>2 шаг.</u> Функцию $u(x,t)$ будем искать в виде произведения двух сомножителей $u(x,t) = e^{-\beta t} \cdot \nu(x,t)$ или $\nu(x,t) = e^{\beta t} \cdot u(x,t)$.

Преобразуем уравнение и краевые условия

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(e^{-\beta t} \cdot \nu(x,t)\right)'_t = -\beta e^{-\beta t} \cdot \nu + e^{-\beta t} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial t}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-\beta t} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}.$$

Подставим в уравнение (4.6)

$$-\beta e^{-\beta t} \cdot \nu + e^{-\beta t} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial t} = a^2 e^{-\beta t} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \beta e^{-\beta t} \cdot \nu.$$

Получим

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}. \tag{4.9}$$

Пересчитаем, согласно подстановке, краевые условия:

$$\begin{aligned} \nu_{x=0} &= e^{-\beta t} \cdot u_{x=0} = e^{-\beta t} \cdot 0 = 0; \\ \nu_{x=L} &= 0; \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\nu_{t=0} = e^{-\beta \cdot 0} \cdot \left(\varphi(x) - T_0\right) = \varphi(x) - T_0. \tag{4.11}$$

В преобразованной задаче (4.9)-(4.11) температура $\nu(x,t)$ обусловлена только теплопроводностью, т. к. исчез член $\beta \cdot u$. Граничные условия при условии равенства температур на боковой поверхности и по концам стержня стали нулевыми (однородными). Начальное условие принципиально не изменилось.

<u>Примечание.</u> Легко заметить, что при граничных условиях, отличных от T_0, преобразованные после подстановок условия на границах будут не однородными. Например, если $T_{x=0} = T_H$, то $u_{x=0} = T_H - T_0$, а $\nu_{x=0} = e^{-\beta t} \cdot (T_H - T_0)$. Анало-

$$\text{(ГУ)} \begin{cases} u_{\xi=0} = 0, \\ u_{\xi=1} = 0. \end{cases}$$

$$\text{(НУ)} \begin{cases} u_{\tau=0} = \sin \pi\xi, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\tau=0} = 0. \end{cases}$$

Решением этой задачи является функция $u(x,t) = \cos\left(\frac{\pi a}{L} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$.

Этот пример говорит о том, что не всегда обязательно преобразовывать все переменные к безразмерному виду. Иногда достаточно преобразовать одну или две переменные.

Получаем новую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial \tau} = \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}, \\ \omega(0,\tau) = 0, \\ \omega(1,\tau) = 1, \\ \omega(\xi,0) = \dfrac{u_H - u_0}{u_H}. \end{cases}$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение колебания струны

$$\text{(УЧП)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < L,\ 0 < t < \infty;$$

$$\text{(ГУ)}\ \begin{cases} u_{x=0} = 0, \\ u_{x=L} = 0. \end{cases}$$

$$\text{(НУ)}\ \begin{cases} u_{t=0} = sin\dfrac{\pi}{L}x, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем независимые переменные (функцию u преобразовывать не будем): $\xi = \dfrac{x}{L}$, $\tau = \dfrac{at}{L}$ (размерность $\left[a^2\right] = \left[\dfrac{м^2}{c^2}\right]$, размерность $\left[a\right] = \left[\dfrac{м}{c}\right]$, поэтому τ – безразмерна).

Подставим в уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\left(\dfrac{\tau^2 \cdot L^2}{a^2}\right)} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial\left(L^2 \xi^2\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Новая задача принимает вид

$$\text{(УЧП)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \qquad 0 < \xi < 1, \quad 0 < \tau < \infty.$$

гично изменится и условие при $x = L$. Но начальное условие будет таким же, как и в поставленной выше задаче.

3 шаг. Предположим, что найдено решение задачи (4.9)-(4.11), т. е. найдена функция $\nu(x,t)$ (этим вопросом пока мы не занимались).

После этого необходимо выполнить обратные подстановки:

1) найти $u(x,t) = e^{-\beta t} \cdot \nu(x,t)$;

2) найти решение первоначальной задачи

$$T(x,t) = T_0 + u(x,t) = T_0 + u(x,t) = T_0 + e^{-\beta t} \cdot \nu(x,t).$$

4.2. Преобразование задачи, содержащей конвективное слагаемое

Уравнение типа теплопроводности с учётом конвекции получено в п. 2.5:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial x};\ a^2 \text{ и } v - const. \tag{4.12}$$

Для приведения уравнения к простейшему виду, т.е. чтобы избавиться от конвективного члена, необходимо искать функцию $T(x,t)$ в виде

$$T = exp\left(-\frac{v\left(x + \frac{vt}{2}\right)}{2a^2}\right) \cdot u, \text{ где } u = u(x,t). \tag{4.13}$$

Выразим слагаемые (4.12) через новую функцию (4.13)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{v^2}{4a^2} exp\left(-\frac{v\left(x + \frac{vt}{2}\right)}{2a^2}\right) \cdot u + exp\left(-\frac{v\left(x + \frac{vt}{2}\right)}{2a^2}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial t};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{v^2}{2a^2} exp\left(-\frac{v\left(x + \frac{vt}{2}\right)}{2a^2}\right) \cdot u + exp\left(-\frac{v\left(x + \frac{vt}{2}\right)}{2a^2}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{v^2}{4a^4} exp\left(-\frac{v\left(x + \frac{vt}{2}\right)}{2a^2}\right) \cdot u - \frac{v}{a^2} exp\left(-\frac{v\left(x + \frac{vt}{2}\right)}{2a^2}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + exp\left(-\frac{v\left(x + \frac{vt}{2}\right)}{2a^2}\right) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

После подстановки в уравнение (4.12) получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4.14}$$

Для исследования конкретного физического процесса к уравнению (4.12) необходимо задать краевые условия. Как и в предыдущем случае, необходимо пересчитать эти условия согласно подстановке (4.13).

4.3. Преобразование уравнения с учётом конвекции и теплообмена через боковую поверхность

С учётом факторов конвекции и теплообмена через боковую поверхность (уравнение (2.16) без учёта тепловых источников) уравнение типа теплопроводности запишется

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + v\frac{\partial T}{\partial x} - \beta T. \tag{4.15}$$

Для упрощения уравнения сделаем подстановку

$$T(x,t) = e^{\mu x + \lambda t} \cdot u(x,t) = e^{\mu x + \lambda t} \cdot u. \tag{4.16}$$

Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot e^{\mu x + \lambda t} \cdot u + e^{\mu x + \lambda t} \cdot \frac{\partial u}{\partial t};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \mu \cdot e^{\mu x + \lambda t} \cdot u + e^{\mu x + \lambda t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mu^2 \cdot e^{\mu x + \lambda t} \cdot u + 2\mu \cdot e^{\mu x + \lambda t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + e^{\mu x + \lambda t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

После подстановки в (4.15) и сокращения на экспоненту получим

$$a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(2\mu \cdot a^2 + v\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(a^2 \cdot \mu^2 + v \cdot \mu - \beta - \lambda\right)u = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{4.17}$$

Для того чтобы в (4.17) исчезли члены, содержащие искомую функцию и её производную, необходимо положить $\begin{cases} 2\mu \cdot a^2 + v = 0 \\ a^2 \cdot \mu^2 + v \cdot \mu - \beta - \lambda = 0 \end{cases}.$

Новая безразмерная система обладает следующими преимуществами:

1) уравнение не содержит параметров;

2) граничные условия имеют простой вид;

3) начальное условие изменилось несущественно (оно содержит известные величины).

Если найдено решение задачи (5.5), то решение исходной задачи (5.1) находится простым пересчётом:

$$u(x,t) = u_H + \left(u_K - u_H\right) \cdot \omega\left(\frac{x}{L}; \frac{a^2 t}{L^2}\right).$$

Следует заметить, что не существует универсальных правил, по которым следует вводить безразмерные переменные. Здесь следует опираться на физику изучаемого процесса и пробовать различные возможности.

Приведём примеры.

Пример 1. Найти безразмерную форму задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < L, \ 0 < t < \infty, \\ u(0,t) = u_H, \\ u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0. \end{cases}$$

Решение. Введём безразмерные переменные $\xi = \dfrac{x}{L}$, $\tau = \dfrac{a^2 t}{L^2}$, $\omega(x,t) = \dfrac{u(x,t) - u_H}{0 - u_H} = \dfrac{u_H - u_H}{-u_H}$. Откуда $x = \xi L$; $t = \dfrac{a^2 \tau}{L^2}$; $u(x,t) = u_H - u_H \cdot \omega(x,t)$.

Подставим в первоначальное уравнение

$$\frac{\partial(u_H - u_H \cdot \omega)}{\partial\left(\dfrac{\tau L^2}{a^2}\right)} = a^2 \frac{\partial^2 (u_H - u_H \cdot \omega)}{\partial\left(\xi^2 \cdot L^2\right)} \Rightarrow \frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}.$$

Пересчитаем и краевые условия из подстановки $\omega(x,t) = \dfrac{u(x,t) - u_H}{-u_H}$.

$$\omega_{\xi=0} = \frac{u_H - u_H}{-u_H} = 0, \ \omega_{\xi=1} = \frac{0 - u_H}{-u_H} = 1, \ \omega_{\tau=0} = \frac{u_0 - u_H}{-u_H}.$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \left(\dfrac{a}{L}\right)^2 \cdot \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}, \; 0 < \xi < 1, \; 0 < t < \infty, \\
\omega_{\xi=0} = 0, \\
\omega_{\xi=1} = 1, \\
\omega_{t=0} = \dfrac{f(x) - u_H}{u_K - u_H}.
\end{cases} \tag{5.4}
$$

Преобразование времени $t \to \tau$

Чтобы завершить поставленную задачу, необходимо ввести безразмерное время. (Это не так очевидно, как в случае первых двух переменных).

Как выбрать безразмерное время?

Поступим следующим образом.

1. Сделаем замену вида $\tau = C \cdot t$, где $C - const$.

2. Вычислим $\dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \dfrac{\partial \omega}{\partial\left(\dfrac{\tau}{C}\right)} = \dfrac{\partial \omega}{\dfrac{1}{C}\partial \tau} = C\dfrac{\partial \omega}{\partial \tau}$.

3. Подставим эту производную в уравнение (5.4) и получим

$$
C\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \left(\frac{a}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}.
$$

Следовательно, нужно выбрать $C = \left(\dfrac{a}{L}\right)^2 \cdot t$, а значит, новое (безразмерное) время должно вводиться по формуле $\tau = \dfrac{a^2 t}{L^2}$.

<u>Примечание.</u> Безразмерное время часто обозначают символом Fo и называют критерием Фурье.

Применяя это преобразование к задаче (5.4), можно полностью перейти к безразмерным переменным ω, ξ и τ.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \omega}{\partial \tau} = \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}, \; 0 < \xi < 1, \; 0 < \tau < \infty, \\
\omega_{\xi=0} = 0, \\
\omega_{\xi=1} = 1, \\
\omega_{\tau=0} = \dfrac{f(L \cdot \xi) - u_H}{u_K - u_H}.
\end{cases} \tag{5.5}
$$

Откуда

$$
\mu = -\frac{v}{2a^2}, \; \lambda = -\left(\frac{v^2}{4a^2} + \beta\right). \tag{4.18}
$$

<u>Вывод.</u> Для упрощения уравнения (4.15) необходима подстановка

$$
T(x,t) = exp\left(-\left(\frac{vx}{2a^2} + \left(\frac{v^2}{4a^2} + \beta\right)t\right)\right) \cdot u(x,t). \tag{4.19}
$$

Покажем, как трансформируются краевые условия для задачи (4.15) при условиях

$$
T_{x=0} = T_H - const, \quad T_{x=L} = T_K - const, \quad T_{t=0} = T_0 - const. \tag{4.20}
$$

$$
\begin{cases}
T_{x=0} = e^{\lambda t} \cdot u_{x=0} = T_H, \\
T_{x=L} = e^{\mu L + \lambda t} \cdot u_{x=L} = T_K, \\
T_{t=0} = e^{\mu x} \cdot u_{t=0} = T_0.
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
u_{x=0} = T_H \cdot e^{-\lambda t}, \\
u_{x=L} = T_K \cdot e^{-(\mu L + \lambda t)}, \\
u_{t=0} = T_0 \cdot e^{-\mu x}.
\end{cases} \tag{4.21}
$$

В этом случае постоянные граничные условия преобразуются в переменные. Такая же трансформация происходит и с начальным условием.

5. Переход к безразмерным переменным

В конкретных областях знаний (физике, химии, биологии, нефтепромысловом деле) уравнения записываются по-разному. Сравните, например, уравнения тепловодности и пьезопроводности. Если уравнения, описывающие различные физические процессы, построены на основе одинаковых, с точки зрения математики, постулатах (закон Фурье – для теплопроводности, закон Дарси – для пьезопроводности, закон Фика – для диффузии вещества), то переходя к безразмерным координатам, их можно привести к одному и тому же виду. Именно по этой причине при решении уравнений с частными производными стараются отвлекаться от физического смысла входящих в него параметров. Для этого от размерных величин переходят к безразмерным.

Основная идея введения новых (безразмерных) переменных состоит в том, что после перехода к безразмерным переменным задача становится чисто математической и уже не содержит характерных физических констант. Именно таким способом уравнения, содержащие всякие нюансы, связанные с физическими параметрами, приводятся к одной и той же форме.

5.1. Приведение уравнения типа теплопроводности к безразмерному виду

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < L,\ 0 < t < \infty, \\ u_{x=0} = u_H, \\ u_{x=L} = u_K, \\ u_{t=0} = f(x). \end{cases} \tag{5.1}$$

Наша задача – дать новую эквивалентную постановку задачи таким образом, чтобы:

1) в новой задаче не было физических параметров (здесь a^2);

2) начальное и граничные условия стали проще.

Для осуществления этой цели введём три новые безразмерные переменные ω, ξ и τ, чтобы заменить прежние u, x и t. По схеме: $u \to \omega$ (безразмерные температура, давление, концентрация); $x \to \xi$ (безразмерная координата (длина)); $t \to \tau$ (безразмерное время).

Преобразование $u \to \omega$

Определим функцию $\omega(x,t)$ формулой

$$\omega(x,t) = \frac{u(x,t) - u_H}{u_K - u_H}. \tag{5.2}$$

Ясно, что новая искомая функция стала величиной безразмерной (например температуру делим на температуру).

Новые граничные условия для $\omega(x,t)$ будут:

$$\omega_{x=0} = \frac{u_{x=0} - u_H}{u_K - u_H} = \frac{u_H - u_H}{u_K - u_H} = 0;\quad \omega_{x=L} = \frac{u_{x=L} - u_H}{u_K - u_H} = \frac{u_K - u_H}{u_K - u_H} = 1.$$

Начальное условие $\omega_{t=0} = \dfrac{u_{t=o} - u_H}{u_K - u_H} = \dfrac{f(x) - u_H}{u_K - u_H}$.

Задача (5.1) запишется так

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2},\ 0 < x < L,\ 0 < t < \infty, \\ \omega_{x=0} = 0, \\ \omega_{x=L} = 1, \\ \omega_{t=0} = \dfrac{f(x) - u_H}{u_K - u_H}. \end{cases} \tag{5.3}$$

Если из задачи (5.3) будет найдена $\omega(x,t)$, то можно найти u:

$$u(x,t) = u_H + (u_K - u_H) \cdot \omega(x,t).$$

Преобразование пространственной координаты $x \to \xi$

Безразмерную длину, естественно, нужно выбрать так, чтобы за единицу масштаба принять L. Поскольку $0 \le x \le L$, выбираем $\xi = \dfrac{x}{L}$. При этом $0 \le \xi \le 1$.

Посмотрим, как изменится уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial(\xi \cdot L)} = \frac{\partial \omega}{L \partial \xi};\quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial(\xi \cdot L)}\left(\frac{\partial \omega}{\partial(\xi \cdot L)}\right) = \frac{1}{L^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}.$$

Задача в переменных ω, ξ и t сформулируется в виде или

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{9.6}$$

Обе части этого уравнения должны быть постоянными, поскольку левая часть зависит от τ, а правая – от x. Так как x и τ не зависят друг от друга, то каждая часть этого уравнения должна быть постоянной. В этом рассуждении – ключ к методу разделения переменных.

Обозначим теперь постоянную, которой должны быть равны левая и правая части (9.6) через d. Тогда уравнение (9.6) распадается на два уравнения:

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = d, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = d. \tag{9.7}$$

Первое из них имеет общее решение $T(\tau) = C \cdot e^{\tau d}$.

Поскольку ни в одном сечении области (т. е. ни при каком фиксированном x) температура (давление, концентрация) не может неограниченно возрастать по абсолютной величине при $\tau \to \infty$ (т. е. при $t \to \infty$), то d должна быть отрицательной. Положим $d = -\lambda^2$, тогда

$$T(\tau) = C \cdot e^{-\lambda^2 \tau}.$$

Второе из уравнений (9.7) принимает вид $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ и имеет общее решение

$$X(x) = A_1 \cdot \cos \lambda x + B_1 \cdot \sin \lambda x.$$

Таким образом, получили частное решение уравнения (9.4)

$$u = \left(A_1 \cdot c \cdot \cos \lambda x + B_1 \cdot c \cdot \sin \lambda x\right) \cdot Ce^{-\lambda^2 \tau},$$

или

$$u = \left(A \cdot \cos \lambda x + B \cdot \sin \lambda x\right) \cdot e^{-\lambda^2 \tau}, \tag{9.8}$$

где $A = A_1 \cdot C$, $B = B_1 \cdot C$.

Функция (9.8) является при любом фиксированном λ решением уравнения (9.4). Для каждого λ можно выбрать разные постоянные A и B. Это означает, что A и B должны быть функциями от λ: $A = A(\lambda)$, $B = B(\lambda)$.

Окончательно имеем семейство частных решений уравнения (9.4)

$$u_\lambda(x, \tau) = \left(A(\lambda) \cdot \cos \lambda x + B(\lambda) \cdot \sin \lambda x\right) \cdot e^{-\lambda^2 \tau}, \tag{9.9}$$

зависящих от параметра λ, который может принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Первый этап решения завершен.

Как было сказано выше, цель любого интегрального преобразования – уменьшение числа независимых переменных в преобразуемой задаче. При решении уравнения типа теплопроводности в одномерном случае искомой функцией является $u(x,t)$. Тогда после прямого преобразования Фурье-образ будет зависеть от параметра n и аргумента t. В этом случае формулы (7.3) и (7.6) примут вид

$$\begin{cases} S(u(x,t)) = S_n(t) = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L u(x,t) \cdot \sin\frac{n\pi}{L} x dx, \; n = 1,2,3\ldots, \\ S^{-1}(S_n(t)) = u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) \cdot \sin\frac{n\pi}{L} x \quad . \end{cases} \tag{7.7}$$

$$\begin{cases} C(u(x,t)) = C_n(t) = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L u(x,t) \cdot \cos\frac{n\pi}{L} x dx, \; n = 0,1,2\ldots, \\ C^{-1}(C_n(t)) = u(x,t) = \dfrac{C_0(t)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \cdot \cos\frac{n\pi}{L} x. \end{cases} \tag{7.8}$$

Пример 1. Выполнить синус-преобразование для $f(x) = x$, $x \in [0, L]$.

Решение

1 шаг. Найдем Фурье-образ (прямое преобразование)

$$S_n = \frac{2}{L}\int_0^L x \cdot \sin\frac{n\pi}{L} x dx = \frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

2 шаг. Выполним обратное преобразование

$$S^{-1} = x = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin\frac{n\pi}{L} x \quad .$$

Этот результат можно интерпретировать и так:

$$\frac{\pi x}{2L} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin\frac{n\pi}{L} x \quad .$$

Сумма ряда при $0 \le x \le L$ равна $\frac{\pi x}{2L}$. В частности, если $x = \frac{L}{2}$, то получим

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin\frac{n\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} + \ldots .$$

Пример 2. Выполнить косинус-преобразование для $f(x) = x$, $x \in [0, L]$.

Решение

1 шаг. Найдём Фурье-образ (прямое преобразование)

а) $n = 0$, $C_0 = \frac{2}{L}\int_0^L x dx = L$;

б) $n=1, 2, \ldots$ $C_n=\frac{2}{L}\int_0^L x\cdot cos\frac{n\pi}{L}xdx=\frac{2L}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right).$

2 шаг. Выполним обратное преобразование

$$C^{-1}(C_n)=x=\frac{L}{2}+\frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}cos\frac{n\pi}{L}x.$$

В частности, если положить в последнем равенстве $x=L$, то получим

$$\frac{\pi^2}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2} \text{ или } \frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots .$$

Полученные в примерах результаты говорят о том, что конечные синус-, косинус-преобразования Фурье позволяют суммировать ряды.

В заключение дадим некоторые рекомендации по применению рассматриваемого в этом пункте преобразования.

1. Преобразование проводится по пространственной координате и $0\le x\le L$. Это означает, что эти преобразования применимы, если задача сформулирована для конечной области ($0\le x\le L$).

2. Для выбора вида ядра преобразования даём следующие рекомендации. Если на границах области заданы значения функции, то ядро преобразования должно быть таким, чтобы его значения на границах обращались в нуль. Если на границах заданы производные, то ядро преобразования должно быть таким, чтобы производная от ядра на границах обращалась в нуль. Сказанное выше представим таблицей.

Таблица 7.1

Условие при $x=0$	Условие при $x=L$	Ядро
Значение функции	Значение функции	$\frac{2}{L}sin\frac{n\pi}{L}x$
Значение производной	Значение производной	$\frac{2}{L}cos\frac{n\pi}{L}x$
Значение функции	Значение функции	$\frac{2}{L}sin\frac{(2n-1)}{2L}x$
Значение производной	Значение производной	$\frac{2}{L}cos\frac{(2n-1)}{2L}x$

9. Решение задач для бесконечной и полубесконечной областей

Если область имеет большие размеры (стержень очень длинный), то на процессы, протекающие в его средней части, главное влияние оказывает начальное распределение температуры, т. е. влияние температурных условий на концах стержня в течение длительного времени почти не будет сказываться. В задачах такого типа область считают бесконечной. Краевые условия при этом отпадают, и на искомую функцию $u=u(x,t)$ накладывается только начальное условие. Как известно, задачи с начальными условиями называются задачей Коши.

Постановка задачи. Решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0 \qquad (9.1)$$

при условии

$$u_{t=0}=f(x). \qquad (9.2)$$

Прежде чем решать поставленную задачу, несколько упростим уравнения, введя вместо времени t новую переменную

$$\tau=a^2t. \qquad (9.3)$$

Тогда $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial\left(\frac{\tau}{a^2}\right)}=a^2\frac{\partial u}{\partial\tau}$, и задача принимает вид

$$\text{(УЧП)} \quad \frac{\partial u}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad (9.4)$$

$$\text{(НУ)} \quad u_{\tau=0}=f(x). \qquad (9.5)$$

При окончательной записи полученного решения нужно сделать обратную подстановку $t=\frac{\tau}{a^2}$.

1 этап. Разделение переменных.

Находим решение (9.1) в виде $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$.

Подставляя это произведение в (9.4), получим

$$X(x)\cdot T'(\tau)=X''(x)\cdot T(\tau),$$

Примечание. Если рассмотреть ситуацию $u_{x=0} = u_0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$, *то собственные числа задачи будут снова как решение уравнения* $ctg(cL) = 0$, *а частные решения* $u_n(x,t) = B_n \sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2L} x \cdot \exp\left(-\left(\dfrac{(2n+1)\pi a}{2L}\right)^2 t\right)$.

Решение задачи

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\frac{(2n+1)\pi}{2L} x \cdot \exp\left(-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2L}\right)^2 t\right), \text{ где}$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2L} x dx.$$

8.5. Задачи для самостоятельного решения

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0$$

при условиях:

1) $u(0,t) = u(L,t) = 0,\ t > 0$,

$$u(x,0) = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x < L/2, \\ L - x & \text{при } L/2 < x < L; \end{cases}$$

2) $u(0,t) = u(L,t) = 0$,

$$u(x,0) = \frac{x(L-x)}{L^2};$$

3) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ u_{x=L} = u_L$,

$u(x,0) = f(x)$;

4) $u_{x=0} = u_0 - const$, $u_{x=L} = u_K - const$,

$u(x,0) = u_H - const$;

5) $u_{x=0} = u_{x=L} = u_0 - const$,

$$u_{t=o} = \begin{cases} 2u_H \cdot \dfrac{x}{L} & \text{при } 0 < x < L/2, \\ \dfrac{2u_H}{L}(L - x) & \text{при } L/2 < x < L, \ u_H - const. \end{cases}$$

3. А как преобразуются производные? Ниже приводятся несколько полезных формул $(u = u(x,t))$:

$$S\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{dS(u)}{dt}; \quad S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{d^2 S(u)}{dt^2};$$

$$S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 S(u) + \frac{2n\pi}{L^2}\left(u(0,t) + (-1)^{n+1} u(L,t)\right);$$

$$C\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 C(u) - \frac{2}{L}\left(\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + (-1)^{n+1}\frac{\partial u(L,t)}{\partial x}\right).$$

4. Для того чтобы можно было применять конечные синус- или косинус-преобразования, исходное уравнение не должно содержать первых производных по x. В этом случае синус-преобразование первой производной сводится к косинус-преобразованию и наоборот.

5. При применении конечных синус- и косинус-преобразований необходимо помнить, что все функции задачи, включая производные, начальные и граничные условия, должны быть разложимыми в ряд по синусам и косинусам.

7.3. Синус- и косинус-преобразования Фурье

Синус- и косинус-преобразование Фурье базируется на интегралах Фурье для чётных и нечётных функций, т. е. на формулах (6.12) – (6.15). Обращаем внимание, что здесь нет слова «конечные».

Как видно будет дальше, функция $f(x)$ здесь рассматривается на множестве $[0, +\infty)$. Можно было назвать эти преобразования «полубесконечными», но не будем вводить новую терминологию.

Итак, интеграл Фурье для чётной функции имеет вид

$$\begin{cases} f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} a(\alpha)\cos(\alpha x)dx, \\ a(\alpha) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\cos(\alpha t)dt. \end{cases} \tag{7.9}$$

Вторую формулу (7.9) можно рассматривать как прямое преобразование функции с ядром $\dfrac{2}{\pi}\cos\alpha t$, а первую – как обратное преобразование.

$$\begin{cases} \Phi(f) = F(\alpha) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty f(t)\sin(\alpha t)dt \ \text{(прямое преобразование)}, \\ \Phi^{-1}(F) = f(x) = \displaystyle\int_0^\infty F(\alpha)\sin(\alpha x)d\alpha \ \text{(обратное преобразование)}. \end{cases} \quad (7.10)$$

Точно также на основе формул (6.14), (6.15) напишем пару формул косинус-преобразования Фурье:

$$\begin{cases} \Phi(f) = F(\alpha) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty f(t)\cos(\alpha t)dt \ \text{(прямое преобразование)}, \\ \Phi^{-1}(F) = f(x) = \displaystyle\int_0^\infty F(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha \ \text{(обратное преобразование)}. \end{cases} \quad (7.11)$$

Примечания.

1. В формулах (7.10), (7.11) функцию $(f(x))$ считали функцией одной переменной. При преобразовании функции $u(x,t)$ можно пользоваться этими же формулами, но t считать константой.

2. Для облегчения пользования формулами (7.10), (7.11) составлены обширные таблицы синус- и косинус-преобразований.

3. При трансформации производных будут полезными формулы (доказываются интегрированием по частям):

1) $\Phi_S(f') = -\alpha\Phi_C(f)$; *2)* $\Phi_S(f'') = \dfrac{2}{\pi}\alpha f(0) - \alpha^2\Phi_S(f)$;

3) $\Phi_C(f') = \dfrac{2}{\pi}\alpha f(0) + \alpha\Phi_S(f)$; *4)* $\Phi_C(f'') = -\dfrac{2}{\pi}\alpha f(0) - \alpha^2\Phi_C(f)$.

Здесь индексы S и C – соответственно, синус- и косинус-преобразования.

4. Иногда формулы (7.10), (7.11) записывают одним двойным интегралом. Например, (7.11) записывают так:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha\int_0^\infty f(t)\cos(\alpha t)dt.$$

Нетрудно увидеть, что внутренний интеграл выполняет прямое преобразование, а внешний – обратное.

5. В некоторых случаях $\dfrac{2}{\pi}$ представляют как $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$. В этом случае, например, пара формул (7.10) записывается так

Постоянная температура на правом конце $\Rightarrow \alpha_L \to \infty$. Получаем $ctg(cL) = 0$, откуда $cL = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, или $c_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2L}$, – собственные числа задачи.

Задача сформулируется следующим образом

$$\text{(УЧП)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \quad (8.49)$$

$$\text{(ГУ)} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=L} = 0; \quad (8.50)$$

$$\text{(НУ)} \quad u\big|_{t=0} = f(x). \quad (8.51)$$

Примечание. При условии $u_{x=L} = u_L \neq 0$ метод разделения переменных не применим. Для использования этого метода необходимо предварительно сделать замену $\nu(x,t) = u(x,t) - u_L$ (замены подобного типа неоднократно были выполнены выше).

1 этап решения приводить не будем. Он много раз выполнялся выше.

Приведём результат

$$u_n(x,t) = \left(A_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x + B_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)\cdot e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2L}\right)^2\cdot t}.$$

2 этап. Подчинение граничным условиям приводит к частным решениям (рассуждения такие же, как и в предыдущем случае (случай 2)):

$$u_n(x,t) = A_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\cdot exp\left(-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2L}\right)^2 t\right), \ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Решение задачи, удовлетворяющее уравнению и ГУ,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\cdot exp\left(-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2L}\right)^2 t\right). \quad (8.52)$$

3 этап. Подчинение решения начальному условию.

Подчиняем решение (8.52) условию (8.51):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x.$$

Откуда

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}xdx. \quad (8.53)$$

Вывод. Решение задачи (8.49) – (8.51) задаётся формулой (8.52), где коэффициенты вычисляются из (8.53).

2 случай. На концах области поддерживается постоянная температура.

Здесь покажем, что граничные условия 1-го рода являются частными случаями условий 3-го рода. Отсюда должно следовать, что и решение задачи при граничных условиях 1-го рода тоже будет частным решением задачи (8.38) – (8.40).

Перепишем условия (8.39) в форме

$$\frac{\lambda}{\alpha_0}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = u_{x=0} - u_0; \quad \frac{\lambda}{\alpha_L}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=L} = u_{x=L} - u_L.$$

Если в этих равенствах α_0 и $\alpha_L \to \infty$ (взять большими), то получим граничные условия 1-го рода: $u_{x=0} = u_0$, $u_{x=L} = u_L$.

Посмотрим, какими будут собственные числа задачи при больших α_0 и α_L.

Перепишем уравнение (8.41) $tg(cL) = \dfrac{\lambda(\alpha_0 + \alpha_L)\cdot c}{\lambda^2\cdot c^2 - \alpha_0\cdot\alpha_L}$ в такой форме (разделим числитель и знаменатель на произведение $\alpha_0\cdot\alpha_L$):

$$tg(cL) = \frac{\lambda c\left(\dfrac{1}{\alpha_L} + \dfrac{1}{\alpha_0}\right)}{\dfrac{\lambda^2\cdot c^2}{\alpha_0\cdot\alpha_L} - 1}.$$

Переходя к пределу при $\alpha_0, \alpha_L \to \infty$, получаем

$$tg(cL) = 0 \Rightarrow c_n = \frac{n\pi}{L}.$$

Пусть $u_0 = 0$, $u_L = 0$. Тогда получаем задачу (8.1) – (8.3). Собственные числа этой задачи имеют тоже вид $\dfrac{n\pi}{L}$ (они обозначены буквой c). Эта задача уже решена в п. 8.1.

При $u_0 \neq 0$ и $u_L \neq 0$ задача тоже решена (см. примечания к п. 8.2).

3 случай. Левый конец теплоизолирован, а на правом конце определённая температура.

Для уравнения пьезопроводности это будет так: на левой границе – непроницаемая зона, а на правой задано давление.

Для определения собственных значений снова обратимся к уравнению $tg(cL) = \dfrac{\lambda(\alpha_0 + \alpha_L)\cdot c}{\lambda^2\cdot c^2 - \alpha_0\cdot\alpha_L}$.

Если левый конец теплоизолирован, то это означает $\alpha_0 = 0$, тогда $tg(cL) = \dfrac{\alpha_L}{\lambda\cdot c}$, или $ctg(cL) = \dfrac{\lambda\cdot c}{\alpha_L}$.

$$\begin{cases} F(\alpha) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty f(t)\sin(\alpha t)dt, \\ f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty F(\alpha)\sin(\alpha x)d\alpha. \end{cases} \qquad (7.11a)$$

Приведём примеры.

<u>Пример 1</u>. Найти косинус-преобразование Фурье функции e^{-x}, заданной в интервале $[0, +\infty)$.

<u>Решение</u>

1. Проверяем выполнение условия $\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty$.

Здесь $\int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1 < \infty$.

2. Выполняем прямое преобразование:

$$F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}\cos(\alpha t)dt = \frac{e^{-t}(\alpha\cdot\sin(\alpha t) - \cos(\alpha t))}{1+\alpha^2}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{\alpha^2+1}.$$

3. Напишем формулу обратного преобразования:

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2+1}d\alpha.$$

<u>Пример 2.</u> Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x \ \text{ при } \ 0 \le x \le 1, \\ 0 \ \text{ при } \quad x > 1. \end{cases}$$

<u>Решение</u>

1. $\int_0^\infty |f(x)|dx = \int_0^1 xdx = \dfrac{1}{2} < \infty$.

2. $\int_0^1 t\cdot\sin(\alpha t)dt = \dfrac{\sin\alpha - \alpha\cdot\cos\alpha}{\alpha^2}$.

3. $x = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\infty \dfrac{\sin\alpha - \alpha\cdot\cos\alpha}{\alpha^2}\cdot\sin(\alpha x)d\alpha,\ 0 \le x \le 1$.

7.4. Преобразование Фурье

Изложенное ниже преобразование называют также экспоненциальным, или комплексным, преобразованием Фурье.

Как было показано в п. 6.2, непериодические функции, заданные на $(-\infty, +\infty)$, не разлагаются в ряды Фурье. Однако для некоторых таких функций можно построить аналог ряда Фурье (формулы (6.10) и (6.11):

$$f(x)=\int_0^{\infty} a(\alpha)\cdot cos\,\alpha x\, d\alpha+\int_0^{\infty} b(\alpha)\cdot sin\,\alpha x\, d\alpha, \qquad (7.12)$$

$$a(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)cos(\alpha t)dt \text{ и } b(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)sin(\alpha t)dt. \qquad (7.13)$$

Представим интеграл Фурье в комплексной форме. Для этого, используя формулу Эйлера $e^{i\gamma}=cos\gamma+i\,sin\gamma$, заменим $cos(\alpha x)$ и $sin(\alpha x)$ на выражения $cos(\alpha x)=\dfrac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}$, $sin(\alpha x)=\dfrac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i}$.

Получим

$$f(x)=\int_0^{\infty} a(\alpha)\cdot\frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}d\alpha+\int_0^{\infty} b(\alpha)\cdot\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i}d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\big(a(\alpha)-ib(\alpha)\big)e^{i\alpha x}d\alpha+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\big(a(\alpha)+ib(\alpha)\big)e^{-i\alpha x}d\alpha. \qquad (7.14)$$

Как следует из формулы (7.13), функции $a(\alpha)-ib(\alpha)$ и $a(\alpha)+ib(\alpha)$ можно переписать с помощью формулы Эйлера в виде

$$a(\alpha)-ib(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(cos(\alpha t)-i\,sin(\alpha t)\big)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt,$$

$$a(\alpha)+ib(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(cos(\alpha t)+i\,sin(\alpha t)\big)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha t}dt.$$

После подстановки этих выражений в (7.14) получим:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt\right)e^{i\alpha t}d\alpha. \qquad (7.15)$$

Полученное выражение и является преобразованием Фурье.

Здесь прямое и обратное преобразования написаны одной формулой. Разделим их.

2 этап. Нахождение решения, удовлетворяющего граничным условиям.

Чтобы определить A_n и B_n $(n=0,1,2,\ldots)$, необходимо производную $u_n(x,t)$ по x подчинить условиям (8.43):

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x}=\left(-A_n\frac{n\pi}{L}sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+B_n\frac{n\pi}{L}cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)\cdot e^{-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2\cdot t},$$

$$\left.\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=B_n\cdot\frac{n\pi}{L}=0 \text{ (экспонента в нуль не обращается).}$$

Откуда $B_n=0$. Тогда

$$\left.\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=-A_n\frac{n\pi}{L}sin(n\pi)=0\Rightarrow A_n\cdot 0=0.$$

Если допустить, что $A_n=0$, то получим нулевое решение уравнения (8.42). Мы же ищем ненулевое решение, поэтому $A_n\neq 0$.

Частные решения, удовлетворяющие условиям (8.43), будут

$$u_n(x,t)=A_n\,cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cdot exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right).$$

А решение уравнения (с точностью до коэффициента A_n) будет

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\,cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cdot exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right), \qquad (8.46)$$

где (8.46) удовлетворяет уравнению (8.42) и условиям (8.43).

3 этап. Нахождение решения, удовлетворяющего начальному условию.

Подчиним решение (8.46) начальному условию $u|_{t=0}=f(x)$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\,cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\quad 0<x<L. \qquad (8.47)$$

Как известно из теории рядов Фурье (раздел 6), коэффициент A_n находится по формуле

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx,\ (n=0,1,2\ldots). \qquad (8.48)$$

Вывод. Решение задачи (8.42) – (8.44) будет

$$u(x,t)=\frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cdot exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right)\cdot\int_0^L f(x)\cdot cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx. \qquad (8.49)$$

$$(\text{ГУ}) \quad \begin{cases} \lambda \cdot \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha_0 \left(u_{x=0} - u_0\right), \\ -\lambda \cdot \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = \alpha_L \left(u_{x=L} - u_L\right); \end{cases} \tag{8.39}$$

$$(\text{НУ}) \quad u|_{t=0} = f(x) \tag{8.40}$$

определяется по (8.25), где γ и γ_1 находятся из системы (8.27).

Общую формулу решения задачи (8.38) – (8.40) ввиду её громоздкости не приводим.

8.4. Решение задач, получающихся как частные случаи граничных условий третьего рода

1 случай. Пусть концы области теплоизолированы. Для уравнения пьезопроводности это будет означать, что на границах пласта непроницаемые зоны (линия сброса).

Перепишем уравнение (8.35) для определения собственных значений

$$tg(cL) = \frac{\lambda(\alpha_0 + \alpha_L)\cdot c}{\lambda^2 \cdot c^2 - \alpha_0 \cdot \alpha_L}. \tag{8.41}$$

Теплоизолированность границ области означает равенство нулю коэффициентов теплоотдачи $(\alpha_0 = \alpha_L = 0)$.

Тогда уравнение (8.41) примет вид $tg(cL) = 0$, откуда $cL = n\pi \Rightarrow c_n = \dfrac{n\pi}{L}$.

Граничные условия (8.23) принимают вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0.$$

Задача полностью сформулируется в виде

$$(\text{УЧП}) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \tag{8.42}$$

$$(\text{ГУ}) \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0; \tag{8.43}$$

$$(\text{НУ}) \quad u|_{t=0} = f(x). \tag{8.44}$$

После разделения переменных (проводится точно так же, как первый этап в п. 8.3) получим

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right) \cdot e^{-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 \cdot t}. \tag{8.45}$$

$$\begin{cases} F(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \ (\text{прямое преобразование}), \\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha \ (\text{обратное преобразование}). \end{cases} \tag{7.16}$$

Пример. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & при \quad x \ge 0, \\ 0 & при \quad x < 0. \end{cases}$$

Решение

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, т. е. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 1 < \infty$.

2. $F(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-i\alpha t} dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \dfrac{1}{1 - i\alpha}$.

Здесь Фурье-образ функции оказался комплекснозначной функцией.

3. Можно написать тождество $e^{-x} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{i\alpha x}}{1 - i\alpha} d\alpha$ при $x \ge 0$.

Примечания.

1. Не все функции можно подвергать преобразованию Фурье. Нужно помнить об абсолютной интегрируемости функции, т. е. $\displaystyle\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty$.

Например, функции $f(x) = C, \sin x, e^x, x^2$ *Фурье-образ не имеют. Он есть только у тех функций, которые достаточно быстро стремятся к нулю при* $|x| \to \infty$.

В прикладных задачах преобразование Фурье применяется к температурным, волновым и другим физическим полям, которые стремятся к нулю при $|x| \to \infty$. *(Это замечание относится и к синус- и косинус-преобразованиям Фурье.)*

2. Абсолютная величина Фурье-образа называется частотным спектром функции $f(x)$.

Например, частотный спектр из приведённого выше примера

$$|F(\alpha)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left|\frac{1}{1 - i\alpha}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left|\frac{1}{1 + \alpha^2} + \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} i\right| = \sqrt{\frac{1}{2\pi(1 + \alpha^2)}}.$$

3. Обратим внимание на Фурье-образы частных производных функции $u(x,t)$:

$$\Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot e^{-i\alpha t}dt=i\alpha\Phi(u)=-\frac{i\alpha}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}u\cdot e^{-i\alpha t}dt,$$

$$\Phi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=-\alpha^2\Phi(u)=-\frac{\alpha^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}u\cdot e^{-i\alpha t}dt,$$

$$\Phi\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{d}{dt}\Phi(u),$$

$$\Phi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=\frac{d^2}{dt^2}\Phi(u).$$

2. Из первого уравнения системы (8.34) видим, что неопределённые пока коэффициенты связаны соотношением $A=\frac{c_n\cdot\lambda}{\alpha_0}\cdot B$.

Учитывая эти примечания решения уравнения (8.30), удовлетворяющее граничным условиям (8.31) принимает вид

$$\nu(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\left(\frac{\lambda}{\alpha_0}c_n\cos(c_nx)+\sin(c_nx)\right)\cdot e^{-c_n{}^2a^2t}. \qquad (8.36)$$

3 этап. Нахождение решения, удовлетворяющего начальному условию.

Подчиним решение (8.36) начальному условию (8.32):

$$\overline{f}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\left(\frac{\lambda}{\alpha_0}c_n\cos(c_nx)+\sin(c_nx)\right).$$

Оставляя в стороне вопросы, связанные с нахождением B_n, запишем результат

$$B_n=\frac{\int_0^L\overline{f}(x)\left(\frac{\lambda}{\alpha_0}c_n\cos(c_nx)+\sin(c_nx)\right)dx}{\int_0^L\left(\frac{\lambda}{\alpha_0}c_n\cos(c_nx)+\sin(c_nx)\right)^2dx}. \qquad (8.37)$$

<u>Выводы:</u>

1. Решение задачи

(УЧП) $\quad \frac{\partial\nu}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2\nu}{\partial x^2},\qquad 0<x<L,\quad t>0;$

(ГУ) $\quad \begin{cases}\lambda\cdot\left.\frac{\partial\nu}{\partial x}\right|_{x=0}=\alpha_0\cdot\nu_{x=0},\\ -\lambda\cdot\left.\frac{\partial\nu}{\partial x}\right|_{x=L}=\alpha_L\cdot\nu_{x=L};\end{cases}$

(НУ) $\quad \nu_{t=0}=f(x)-\gamma-\gamma_1\cdot x=\overline{f}(x)$

выражается формулами (8.36), где B_n вычисляется по формуле (8.37).

2. Решение первоначально поставленной задачи

(УЧП) $\quad \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\quad t>0; \qquad (8.38)$

Полученная система однородна относительно A и B. Чтобы система имела ненулевое решение, определитель должен равняться нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_0 & -c\lambda \\ \lambda \cdot c \cdot sin(cL) - \alpha_L \cdot cos(cL) & -\lambda \cdot c \cdot cos(cL) - \alpha_L \cdot sin(cL) \end{vmatrix} = 0 .$$

После преобразований получим уравнение

$$tg(cL) = \frac{\lambda(\alpha_0 + \alpha_L) \cdot c}{\lambda^2 \cdot c^2 - \alpha_0 \cdot \alpha_L} . \qquad (8.35)$$

К сожалению, уравнение (8.35) не является простейшим тригонометрическим уравнением, т. к. искомая величина c находится как под знаком тангенса, так и в правой части. Значения c_1, c_2, … можно найти численными методами или с помощью ЭВМ.

Величины c принято называть <u>собственными значениями</u> краевой задачи. Графически корни уравнения показаны на рис. 8.3.

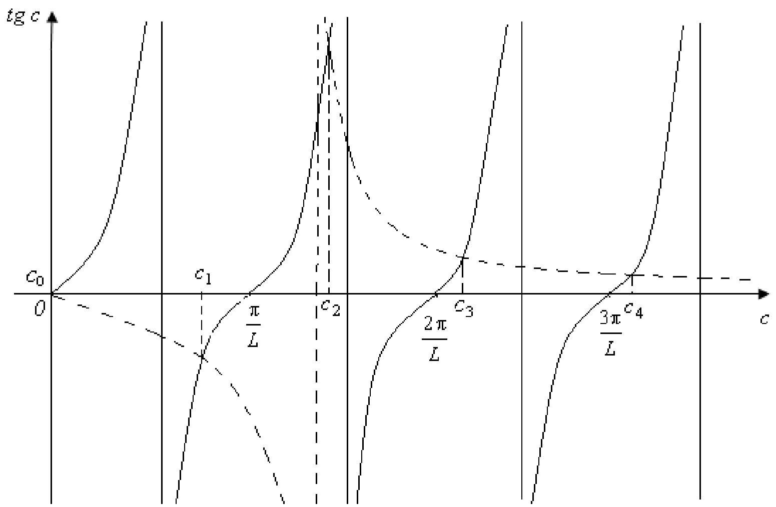


Рис. 8.3 – Корни уравнения (8.35). Пунктирная линия – график правой части уравнения (8.35)

<u>Примечания.</u>

1. Основная задача этого этапа решения выполнена – найдены значения c_n; «c» *принимает изолированные (дискретные) значения и их счетное множество. Это значит, что и частных решений будет такое же множество.*

8. Решение уравнения типа теплопроводности методом разделения переменных

Метод разделения переменных, или метод Фурье, – один из наиболее почтенных по возрасту (в 1822 г. Жан Батист Фурье (1768-1830) опубликовал работу «Аналитическая теория тепла», где изложил метод разделения переменных). Это мощный метод решения смешанных (при НУ и ГУ) задач. Он применяется, когда:

1) уравнение является <u>линейным</u> и <u>однородным</u> (не обязательно с постоянными коэффициентами);

2) граничные условия заданы в виде

$$\alpha_1 \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \beta_1 u(0,t) = 0, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0 ,$$

$$\alpha_2 \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} + \beta_2 u(L,t) = 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0 .$$

Такие граничные условия называются <u>линейными</u> и <u>однородными</u>.

8.1. Решение уравнения при условии нулевой температуры на границах области

Для ознакомления с методом Фурье рассмотрим простую задачу:

$$\text{(УЧП)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le L , \quad 0 < t < \infty ; \qquad (8.1)$$

$$\text{(ГУ)} \quad \begin{cases} u(0,\, t) = 0 \\ u(L,\, t) = 0 \end{cases}, \quad 0 < t < \infty ; \qquad (8.2)$$

$$\text{(НУ)} \quad u(x,\, 0) = \varphi(x) , \quad 0 < x < L . \qquad (8.3)$$

Прежде чем приступить к разделению переменных, дадим <u>температурную интерпретацию</u> задачи. Имеется стержень конечной длины, концы которого поддерживаются при постоянной, равной нулю температуре (на самом деле концы могут поддерживаться и при гораздо более высокой температуре, значения которой принимаются за начало отсчёта). Начальное условие задано в виде произвольной функции $\varphi(x)$.

Наша задача – найти распределение температуры $u(x,t)$ в последующие моменты времени.

Будем искать решение уравнения в виде $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$, где $X(x)$ – функция, зависящая только от переменной x, а $T(t)$ – зависящая только от t. Такое решение является в каком-то смысле простейшим, поскольку температура $u(x,t)$, представленная в таком виде, будет сохранять «форму» профиля в различные моменты времени (рис. 8.1).

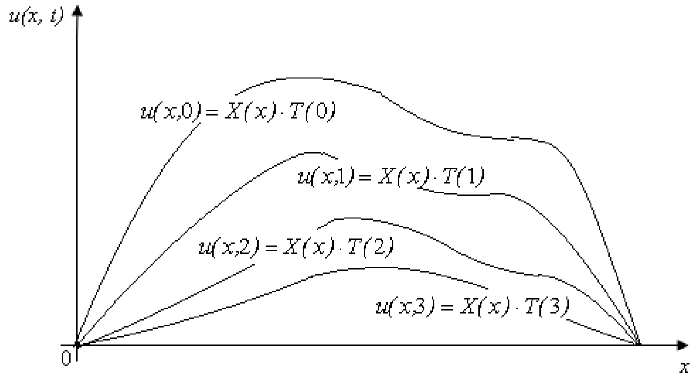


Рис. 8.1 – График функции $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$
в различные моменты времени

Общая идея заключается в том, чтобы найти бесконечное число таких решений УЧП, которые удовлетворяют граничным условиям. Эти простейшие функции $u_n(x,t) = X_n(x)\cdot T_n(t)$, называемые фундаментальными решениями, являются как бы кирпичиками, из которых строится решение нашей задачи. Решение задачи $u(x,t)$ находится в виде такой линейной комбинации фундаментальных решений $X_n(x)\cdot T_n(t)$, что результирующая сумма $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot X_n(x)\cdot T_n(t)$ удовлетворяет начальному условию. Поскольку эта сумма удовлетворяет уравнению и краевым условиям, то она является решением исходной задачи. Осталось подробнее рассмотреть эти выкладки.

Разделение переменных

1 этап. Нахождение элементарных решений

Необходимо найти функцию $u = u(x,t)$, которая является решением задачи (8.1) – (8.3).

Приступим к решению задачи.

1 этап. Разделение переменных.

Будем искать решение (8.30) в виде $\nu(x,t) = X(x)\cdot T(t)$.

Подставим $\nu(x,t)$ в уравнение (8.30)

$$X(x)\cdot T'(t) = a^2 \cdot X''(x)\cdot T(t).$$

Разделим обе части уравнения на a^2XT.

Получим

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -c^2.$$

Получим систему ОДУ

$$\begin{cases} T' + c^2a^2T = 0, \\ X'' + c^2X = 0. \end{cases}$$

Откуда

$$T = B_1 \cdot e^{-c^2a^2t}; \quad X = A_1\cos(cx) + A_2\sin(cx).$$

Решением (пока c не определено) уравнения (8.30) будет

$$\nu(x,t) = \left(A\cos(cx) + B\sin(cx)\right)\cdot e^{-c^2a^2t} \tag{8.33}$$

где $A = A_1\cdot B_1$, $B = A_2 \cdot B_1$.

2 этап. Нахождение решения, удовлетворяющего граничным условиям.

Подчиним решение (8.33) граничным условиям (8.31):

$$\frac{\partial\nu}{\partial x} = \left(-Ac\sin(cx) + Bc\cos(cx)\right)\cdot e^{-c^2a^2t};$$

$$\left.\frac{\partial\nu}{\partial x}\right|_{x=0} = B\cdot c\cdot e^{-c^2a^2t};$$

$$\left.\frac{\partial\nu}{\partial x}\right|_{x=L} = \left(-Ac\sin(cL) + Bc\cos(cL)\right)\cdot e^{-c^2a^2t};$$

$$\nu_{x=0} = A\cdot e^{-c^2a^2t}, \quad \nu_{x=L} = \left(A\cos(cL) + B\sin(cL)\right)\cdot e^{-c^2a^2t}.$$

Подставив полученные выражения в (8.31), сократив их на экспоненту, получим

$$\begin{cases} \alpha_0 A - c\cdot\lambda\cdot B = 0, \\ \left(\frac{\alpha_L}{\lambda}\cos(cL) - \lambda\sin(cL)\right)A + \left(\frac{\alpha_L}{\lambda}\sin(cL) + \lambda\cos(cL)\right)B = 0. \end{cases} \tag{8.34}$$

$$\begin{cases} \alpha_0\gamma - \lambda\gamma_1 = \alpha_0 u_0, \\ \alpha_L\gamma + (\alpha_L \cdot L + \lambda)\gamma_1 = u_L\alpha_L. \end{cases} \tag{8.27}$$

Система (8.27) относительно γ и γ_1 имеет единственное решение, т. к. определитель этой системы не равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_0 & -\lambda \\ \alpha_L & \alpha_L \cdot L + \lambda \end{vmatrix} = \alpha_0(\alpha_L \cdot L + \lambda) + \lambda\alpha_L > 0,$$

т. к. все величины $(\alpha_0,\ \alpha_L, \lambda, L)$ – положительные числа.

Найдя из системы (8.27) γ и γ_1, получим для $\nu(x,t)$ краевые условия в виде

$$\lambda \cdot \frac{\partial \nu}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \alpha_0 \nu_{x=0}; \quad -\lambda \cdot \frac{\partial \nu}{\partial x}\bigg|_{x=L} = \alpha_L \nu_{x=L}, \tag{8.28}$$

которые уже будут однородными.

Посмотрим, как изменится начальное условие в результате подстановки (8.25):

$$\nu_{t=0} = u_{t=0} - \gamma - \gamma_1 x = f(x) - \gamma - \gamma_1 x = \overline{f}(x). \tag{8.29}$$

Наконец, надо подстановкой (8.25) трансформировать уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nu(x,t) + \gamma + \gamma_1 L) = \frac{\partial \nu}{\partial t};$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\nu(x,t) + \gamma + \gamma_1 L) = a^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}.$$

Уравнение не изменилось.

Таким образом, приходим к следующей задаче для функции $\nu = \nu(x,t)$.

$$\text{(УЧП)} \quad \frac{\partial \nu}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \tag{8.30}$$

$$\text{(ГУ)} \quad \begin{cases} \lambda \cdot \dfrac{\partial \nu}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \alpha_0 \cdot \nu_{x=0}, \\ -\lambda \cdot \dfrac{\partial \nu}{\partial x}\bigg|_{x=L} = \alpha_L \cdot \nu_{x=L}; \end{cases} \tag{8.31}$$

$$\text{(НУ)} \quad \nu_{t=0} = \overline{f}(x). \tag{8.32}$$

Будем искать решение задачи в виде

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t). \tag{8.4}$$

Если (8.4) является решением, то она должна удовлетворять уравнению (8.1). Подставим (8.4) в уравнение. В результате подстановки получим

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t).$$

Выполним операцию, присущую данному методу: разделим обе части последнего уравнения на $a^2 \cdot X(x) \cdot T(t)$. Деление возможно, т. к. решение должно быть отличным от нуля:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Про это выражение говорят, что переменные разделены, т. к. левая часть уравнения зависит только от t, а правая – только от x. Так как x и t не зависят друг от друга, то каждая часть этого уравнения должна быть константой. Обозначим эту константу через $"-\lambda^2"$.

Тогда

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \ \text{или} \ \begin{cases} T' + a^2\lambda^2 T = 0, \\ X'' + \lambda^2 X = 0. \end{cases} \tag{8.5}$$

Примечание. Если отношение принять положительным (λ^2) или нулём, то уравнение $X'' - a^2\lambda^2 X = 0$, или $X'' = 0$, с граничными условиями $X(0) = X(L) = 0$ имело бы только тривиальное решение $X(x) \equiv 0$. Из этого следовало бы, что и искомая функция $u(x,t) \equiv 0$. Мы же ищем решение, отличное от нуля и обращающееся в нуль только в двух точках: $x = 0$ и $x = L$.

Решаем уравнения (8.5). Они являются обыкновенными дифференциальными уравнениями стандартного типа. Их общие решения запишутся в виде $T(t) = A_1 \cdot e^{-a^2\lambda^2 t}$, $X(x) = A_2 \sin(\lambda x) + B_2 \cos(\lambda x)$, где A_1, A_2, B_2 – произвольные постоянные.

Следовательно, функция вида

$$u(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}(A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)) \tag{8.6}$$

$(A = A_1 \cdot A_2;\ B = A_1 \cdot B_2)$ является решением уравнения (8.1), что можно проверить непосредственной подстановкой.

Итак, имеется бесконечный набор функций (λ – произвольная постоянная), удовлетворяющих уравнению (8.1).

2 этап. Нахождение решений, удовлетворяющих граничным условиям

На первом этапе получили решение, удовлетворяющее уравнению (8.1), но не все они (при любом λ) удовлетворяют граничным условиям (8.2).

Чтобы сделать это, подчиним (8.6) условиям (8.2):

$$u(0,t) = B \cdot e^{-a^2\lambda^2 t} = 0 \Rightarrow B = 0,$$

$$u(L,t) = A \cdot e^{-a^2\lambda^2 t} \cdot sin(\lambda L) = 0 \Rightarrow sin(\lambda L) = 0.$$

Второе граничное условие накладывает ограничение на возможные значения константы λ: она должна быть решением уравнения $sin\lambda L = 0$, которое имеет вид: $\lambda L = n\pi,\ \ n \in Z$, или $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{L},\ \ n \in Z$.

При таких λ_n (8.6) удовлетворяет не только уравнению, но и граничным условиям, и принимает вид

$$u_n(x,t) = A_n \cdot exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right) \cdot sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad n = 1,2,... \tag{8.7}$$

(Если $n = -1,-2,...$, то решение меняет знак, т. к. синус меняет знак. Поэтому этот случай рассматривать нет необходимости.)

Решение (8.7) представляет счётное множество фундаментальных решений, конкретный вид суммы которых будет зависеть от начального условия. На рис. 8.2 представлены графики нескольких фундаментальных решений.

3 этап. Нахождение решения, удовлетворяющего уравнению, граничным и начальным условиям

Уравнение (8.1) является линейным и однородным. Тогда сумма частных решений тоже является решением (раздел 1). Согласно (8.7), фундаментальных решений будет счётное множество ($n = 1,2,...$).

Следовательно, решением будет и

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right) \cdot sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{8.8}$$

Осталось подобрать коэффициенты A_n таким образом, что $u(x,t)$ будет удовлетворять начальному условию (8.3).

Подстановка начального условия в (8.8) даёт

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{8.9}$$

Рассмотрим более общий случай: α_0 и α_L – коэффициенты теплообмена, u_0 и u_L – температура при $x = 0$ и $x = L$.

Тогда формулы (3.1) примут вид

$$\text{(ГУ)} \quad \begin{cases} \lambda \cdot \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha_0 \left(u_{x=0} - u_0\right), \\ -\lambda \cdot \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = \alpha_L \left(u_{x=L} - u_L\right); \end{cases} \tag{8.23}$$

$$\text{(НУ)} \quad u\big|_{t=0} = f(x). \tag{8.24}$$

Напомним, что λ – коэффициент теплопроводности; u_0, u_L будем считать постоянными.

В случае ГУ (8.23) метод Фурье не применим, т. к. эти условия <u>неоднородные</u> (нулевая функция $u(x,t)$ не удовлетворяет уравнениям).

Для применения метода Фурье необходимо свести задачу к <u>однородным</u> ГУ. Для этого введём новую функцию $\nu = \nu(x,t)$, связанную с $u = u(x,t)$ формулой

$$u(x,t) = \nu(x,t) + \gamma + \gamma_1 \cdot x, \tag{8.25}$$

где γ и γ_1 – некоторые постоянные, которые нужно подобрать такими, чтобы для функции ν получились <u>однородные</u> ГУ.

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial \nu}{\partial x} + \gamma_1$, то после подстановки в (8.23) получим

$$\begin{cases} \lambda \cdot \left(\left.\dfrac{\partial \nu}{\partial x}\right|_{x=0} + \gamma_1\right) = \alpha_0 \left(\nu_{x=0} + \gamma - u_0\right), \\ -\lambda \cdot \left(\left.\dfrac{\partial \nu}{\partial x}\right|_{x=L} + \gamma_1\right) = \alpha_L \left(u_{x=L} + \gamma + \gamma_1 L - u_L\right), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \lambda \cdot \left.\dfrac{\partial \nu}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha_0 \nu_{x=0} + \alpha_0 \gamma - \lambda \gamma_1 - \alpha_0 u_0, \\ -\lambda \cdot \left.\dfrac{\partial \nu}{\partial x}\right|_{x=L} = \alpha_L \nu_{x=L} + \alpha_L \gamma + \left(\alpha_L \cdot L + \lambda\right)\gamma_1 - u_L \alpha_L. \end{cases} \tag{8.26}$$

Для того чтобы условия (8.26) стали однородными (равенства выполнялись при $\nu = 0$), все «мешающие» слагаемые должны обратиться в нуль:

Подставим (8.16) в уравнение (8.13). Получим $\dfrac{\partial \nu}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}$. Уравнение не изменилось.

В результате подстановки (8.16) получили новую задачу (связанную с первоначальной):

$$(\text{УЧП}) \quad \frac{\partial \nu}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty; \tag{8.17}$$

$$(\text{ГУ}) \quad \nu_{x=0} = 0, \quad \nu_{x=L} = 0; \tag{8.18}$$

$$(\text{НУ}) \quad u_{t=0} = \overline{\varphi}(x). \tag{8.19}$$

Но эта задача нами уже решена в п. 8.1. Выпишем это решение из (8.11), (8.12).

$$\nu(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \text{ где} \tag{8.20}$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \overline{\varphi}(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \tag{8.21}$$

Чтобы получить решение поставленной задачи (8.13) – (8.15), сделаем обратную подстановку:

$$u(x,t) = f_1(x) + \frac{f_2(x) - f_1(x)}{L} \cdot x + \nu(x,t). \tag{8.22}$$

Здесь решение состоит из двух частей: $f_1(x) + \dfrac{f_2(x) - f_1(x)}{L} \cdot x$ – стационарная часть решения; $\nu(x,t)$ – нестационарная часть.

Легко видеть, что при $t \to \infty$ $u(x,t) \to f_1(x) + \dfrac{f_2(x) - f_1(x)}{L} \cdot x$.

Примечание. *Если граничные условия – постоянные величины* $u_{x=0} = u_H$, $u_{x=L} = u_K$, *то* $u(x,t) = u_H + \dfrac{u_K - u_H}{L} \cdot x + \nu(x,t)$. *При этом* $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - u_H - \dfrac{u_K - u_H}{L} \cdot x$.

8.3. Решение уравнения при граничных условиях третьего рода

В разделе 3 были сформулированы граничные условия третьего рода при условии постоянной температуры T_0 и коэффициента теплообмена α на концах области.

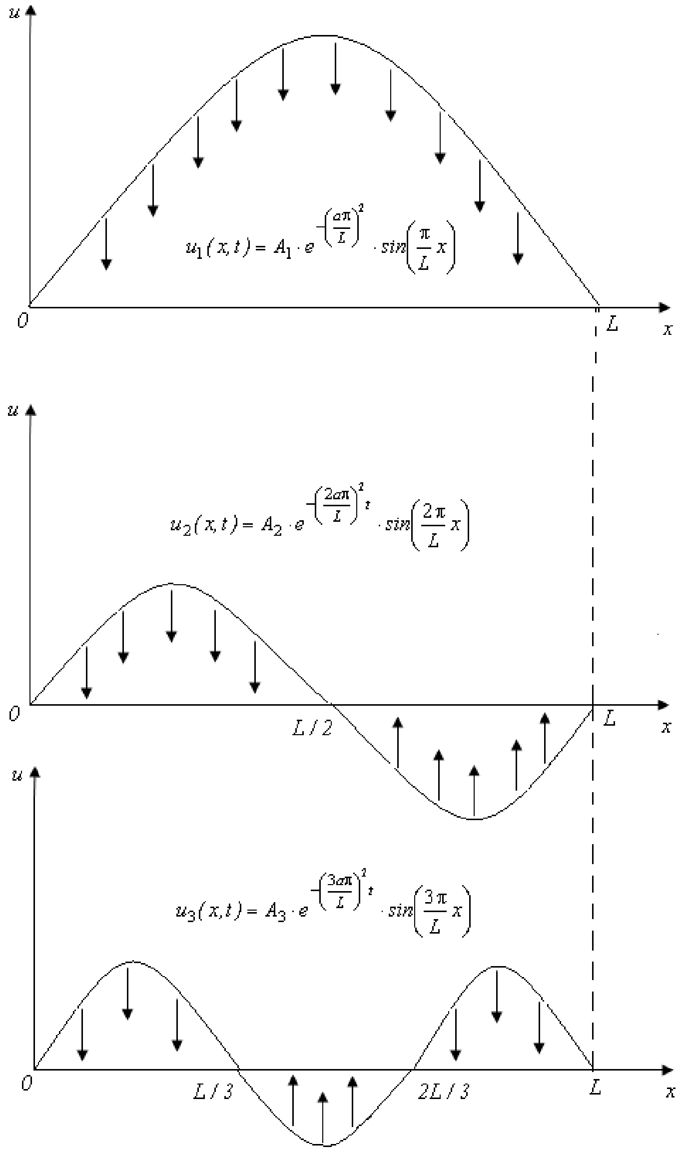


Рис. 8.2 – Фундаментальные решения

$u(x,t) = A_n \cdot exp\left(-\left(\dfrac{an\pi}{L}\right)^2 t\right) \cdot sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$ при $n = 1,2,...$

Это уравнение приводит нас к вопросу: можно ли начальную температуру $\varphi(x)$ разложить в ряд по элементарным функциям вида

$$A_1\, sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + A_2\, sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + A_3\, sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + \ldots\ ?$$

В разделе 6 дан ответ на вопрос на этот вопрос. При довольно слабых ограничениях разложение функции в ряд возможно. В инженерных задачах, как правило, функция разложима в ряд Фурье.

Тогда, согласно формулам (6.6) и (6.7)

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\cdot sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx. \qquad (8.10)$$

В итоге получим, что решением уравнения (8.1) при условиях (8.2) и (8.3) является

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \exp\left(-\left(\dfrac{an\pi}{L}\right)^2 t\right)\cdot \sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right), \text{ где} & (8.11) \\ A_n = \dfrac{2}{L}\int\limits_0^L \varphi(x)\cdot \sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)dx. & (8.12) \end{cases}$$

Можно убедиться в том, что полученное решение удовлетворяет всем условиям задачи.

В заключение сделаем несколько замечаний относительно полученного решения.

1. Каждое слагаемое в разложении (8.11) является функцией от x и t. Вклад слагаемых с большими номерами уменьшается, т. к. множитель $exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right)$ быстро уменьшается с увеличением t.

2. По истечении достаточно большого промежутка времени полное решение будет приближенно совпадать с первым слагаемым, которое представляет затухающую со временем полуволну синусоиды. Такое решение принято называть <u>квазистационарным:</u>

$$u(x,t) \approx \frac{2}{L}\cdot exp\left(-\left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 t\right)\cdot sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\cdot \int_0^L \varphi(x)\cdot sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)dx.$$

3. При $t\to\infty$ $u(x,t)\to 0$, что видно из (8.11). Время процесса стабилизации температуры зависит от L, от свойств материала, т. к. $a^2 = \dfrac{\lambda}{c\cdot\rho}$, где λ – коэффициент теплопроводности; c – теплоёмкость; ρ – плотность.

<u>Задание.</u> Решите уравнение (8.1) при однородных условиях (8.2) и начальных условиях:

а) $\varphi(x)=1$; б) $\varphi(x)=Lx-x^2$.

8.2. Решение уравнения при произвольных граничных условиях первого рода

Необходимо найти решение задачи

$$(\text{УЧП})\quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\quad 0<t<\infty; \qquad (8.13)$$

$$(\text{ГУ})\quad \begin{cases} u_{x=0} = f_1(x) \\ u_{x=L} = f_2(x) \end{cases},\quad 0<t<\infty; \qquad (8.14)$$

$$(\text{НУ})\quad u_{t=0} = \varphi(x),\quad 0<x<L. \qquad (8.15)$$

Метод Фурье, который мы предполагаем применить к решению этой задачи, непосредственно не применим, т. к. условия (8.14) <u>неоднородны.</u> Поэтому, прежде чем применять метод Фурье, мы должны свести задачу к такой, в которой граничные условия <u>однородны.</u>

Для этого введём новую функцию $\nu=\nu(x,t)$, связанную с $u=u(x,t)$ формулой

$$u(x,t) = \nu(x,t) + f_1(x) + \frac{f_2(x)-f_1(x)}{L}\cdot x. \qquad (8.16)$$

Подчиним (8.16) условиям (8.14) и (8.15):

$x=0$, $\quad f_1(x) = \nu(0,t) + f_1(x) \Rightarrow \nu_{x=0} = 0$;

$x=L$, $\quad f_2(x) = \nu(L,t) + f_2(x) \Rightarrow \nu_{x=L} = 0$;

$t=0$, $\quad \varphi(x) = \nu(x,0) + f_1(x) + \dfrac{f_2(x)-f_1(x)}{L}\cdot x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \nu_{t=0} = \varphi(x) - f_1(x) - \frac{f_2(x)-f_1(x)}{L}\cdot x = \overline{\varphi}(x).$$

2 этап. Суперпозиция (наложение) решений.

Уравнение (9.4) линейное и однородное; оно имеет, как установлено в главе 1, бесчисленное множество частных решений, зависящих от непрерывно изменяющегося параметра λ.

Тогда функция

$$u(x,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}u_{\lambda}(x,\tau)d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\lambda)\cdot cos\lambda x+B(\lambda)\cdot sin\lambda x\right)\cdot e^{-\lambda^2\tau}d\lambda \qquad (9.10)$$

также является решением уравнения (9.4).

3 этап. Подчинение решения начальному условию.

Необходимо подобрать неизвестные функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ так, чтобы решение (9.10) удовлетворяло начальному условию (9.5), т. е. чтобы

$$u_{\tau=0}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\lambda)\cdot cos\lambda x+B(\lambda)\cdot sin\lambda x\right)d\lambda=f(x). \qquad (9.11)$$

Последнее равенство означает, что функцию $f(x)$ надо представить интегралом Фурье.

Напомним, что разложение $f(x)$ в интеграл Фурье возможно, если функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Фурье на любом конечном интервале и если эта функция абсолютно интегрируема, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ сходится. Первое условие (условие Дирихле) для физических задач всегда выполняются. Второе условие, т. е. сходимость интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$, означает конечность тепловой энергии стержня (т. к. тепловая энергия пропорциональна абсолютной температуре).

Для определения $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ выпишем формулы (6.9)

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)cos\lambda\xi d\xi\right)cos\lambda x+\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)sin\lambda\xi d\xi\right)sin\lambda x\right)d\lambda.$$

(Здесь учтено, что косинус – чётная функция.)

Сравнивая это разложение и формулу (9.11), заключаем, что неизвестные пока $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ должны определяться формулами

$$\begin{cases} A(\lambda)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)cos\lambda\xi d\xi, \\ B(\lambda)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)sin\lambda\xi d\xi. \end{cases} \qquad (9.12)$$

Подставив найденные $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в решение (9.10), получим решение задачи

$$u(x,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\left(\cos\lambda x\cdot\cos\lambda\xi+\sin\lambda x\cdot\sin\lambda\xi d\xi\right)\cdot e^{-\lambda^2\tau}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\cdot e^{-\lambda^2\tau}d\xi, \qquad (9.13)$$

которая одновременно удовлетворяет уравнению и начальному условию.

С помощью специальных приёмов решение (9.13) можно привести к виду

$$u(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}d\xi.$$

Для получения решения поставленной задачи (9.1), (9.2), сделаем обратную подстановку (9.3)

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi. \qquad (9.14)$$

Формулу (9.14) принято называть формулой Пуассона для уравнения теплопроводности.

9.1. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности и его физический смысл

Выясним физический смысл полученного решения (9.14). Рассмотрим входящую в (9.14) функцию

$$\varphi_\xi(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \qquad (9.15)$$

Непосредственной подстановкой можно показать, что (9.15) является решением уравнения (9.1). Функцию $\varphi_\xi(x,t)$ принято называть фундаментальным решением уравнения теплопроводности, или функцией источника, или функцией Грина (иногда обозначают $G(x,t)$).

Физическим тепловым импульсом будем называть следующее начальное распределение температуры (рис. 9.1):

$$f_\xi(x)=\begin{cases}u_0 & при \quad |x-x_0|<\xi,\\ 0 & при \quad |x-x_0|>\xi.\end{cases}$$

Учебное издание

Илья Фёдорович Чупров
Екатерина Александровна Канева

Уравнения параболического типа и некоторые методы их решения

Учебное пособие

Редакторы Л. А. Кокшарова, К. В. Коптяева
Технический редактор Л. П. Коровкина

План 2012 г., позиция 60. Подписано в печать 31.05.2012 г.
Компьютерный набор. Гарнитура Times New Roman.
Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 6,0. Уч.-изд. л. 5,4. Тираж 120 экз. Заказ № 264.

Ухтинский государственный технический университет.
169300, Республика Коми, г. Ухта, ул. Первомайская, д. 13.
Типография УГТУ.
169300, Республика Коми, г. Ухта, ул. Октябрьская, д. 13.

Библиографический список

1. Араманович, И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М. : Наука, 1969. – 286 с.

2. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Физматгиз, 1974. – 542 с.

3. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 735 с.

4. Фарлоу, С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С. Фарлоу. – М. : Мир, 1985. – 383 с.

5. Щелкачёв, В. Н. Подземная гидравлика / В. Н. Щелкачёв, Б. Б. Лапук. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 736 с.

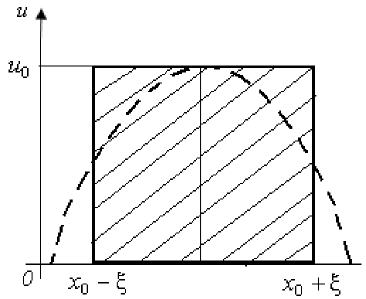


Рис. 9.1 – Распределение температуры

Такое распределение температуры возникает, если в стержень, температура которого равна нулю, в момент времени $t=0$ на отрезке $[x_0-\xi;\ x_0+\xi]$ внезапно введено некоторое количество тепла (подведено пламя), тогда температура этого отрезка подскакивает до u_0. Это количество тепла пропорционально площади прямоугольника $2\xi u_0$. Если площадь сечения стержня равна S, то количество тепла $\theta=2\xi S\rho\cdot c\cdot u_0$, где c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, $2\xi S$ – объём стержня на отрезке $[x_0-\xi;\ x_0+\xi]$. Температура, конечно, не может быть разрывной функцией $f_\xi(x)$ (она приближённо будет иметь вид пунктирной линии) и будет тем меньше отличаться от пунктирного графика, чем у́же и кратковременнее будет подогрев.

При таком физическом тепловом импульсе в качестве начального распределения температуры решение (9.14) будет иметь вид

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\int\limits_{x_0-\xi}^{x_0+\xi} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi. \qquad (9.16)$$

По теореме о среднем значении интеграл (9.16) можно записать в виде

$$\int\limits_{x_0-\xi}^{x_0+\xi} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi=2\xi e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4a^2t}},\ \text{где}\ \mu\in(x-\xi;x+\xi).$$

Тогда решение (9.16) может быть записано так:

$$u(x,t)=\frac{2\xi u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4a^2t}}=\frac{\theta}{S\cdot\rho\cdot c}\cdot\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4a^2t}}$$

так как $2\xi u_0=\dfrac{\theta}{S\cdot\rho\cdot c}$. Чтобы исключить физические параметры материала, положим $\theta=S\cdot\rho\cdot c$. Тогда получим решение физического импульса в виде

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4a^2t}}. \qquad (9.17)$$

От физического импульса перейдём к точечному (идеальному) импульсу, устремляя ξ к нулю. Так как в наших предложениях $2\xi u_0=1$, то $\xi\to 0 \Rightarrow u_0\to\infty$. Тогда и $\mu\to x_0$.

Значит, решение (9.17) превратится (для точечного импульса) в функцию

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}=\varphi_{x_0}(x,t), \qquad (9.18)$$

т. е. в фундаментальное решение при значении параметра $\xi=x_0$.

Точечный тепловой импульс является, конечно, ещё в большей мере абстракцией, чем физический импульс на отрезке. Но он может быть приближённо реализован, если температура (давление) будет действовать на очень маленьком отрезке.

Примечание. Математически начальное распределение температуры (давления) при точечном импульсе представляется функцией Дирака $\delta(x-x_0)$, *представляющей предел физического импульса при* $\xi\to 0$.

Функция Дирака определяется следующим образом:

1) $\delta(x-x_0)=\begin{cases}0 & \text{при } x\ne x_0,\\ +\infty & \text{при } x=x_0;\end{cases}$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)dx=1.$

Рассмотрим теперь, как распространяется тепло (давление) после точечного импульса. Для этого нужно исследовать графики функций (9.18) при $t>0$. Эта функция называется кривой нормального распределения (вспомните нормальное распределение в теории вероятностей).

График симметричен относительно прямой $x=x_0$ (рис. 9.2). Максимум в точке $x=x_0$, он равен $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}$. С увеличением t его значение убывает. Площадь под каждой кривой равна единице, т. е. $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}dx=1$. Интересно также сравнить, как меняется температура в фиксированных точках $x\ne x_0$ при $t\to\infty$ (рис. 9.3).

Окончательно решение задачи будет

$$u(x,t)=u_0+Lq_K\left(\frac{x^2}{2L^2}-\frac{1}{6}\right)-Lq_H\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{L}+\frac{x^2}{2L^2}\right)+\frac{a^2}{L}(q_K-q_H)\cdot t+$$

$$+\frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_H-(-1)^n q_K}{n^2}\cdot exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right)\cdot cos\frac{n\pi}{L}x. \qquad (10.26)$$

Сделаем проверку выполнения ГУ задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=Lq_K\cdot\frac{x}{L^2}-Lq_H\left(-\frac{1}{L}+\frac{x}{L^2}\right)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_H-(-1)^n q_K}{n}\cdot\exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x; \qquad (10.27)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-Lq_H\left(-\frac{1}{L}\right)=q_H, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=q_K,$$

$$u_{t=0}=u_0+Lq_K\left(\frac{x^2}{2L^2}-\frac{1}{6}\right)-Lq_H\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{L}+\frac{x^2}{2L^2}\right)+\frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_H-(-1)^n q_K}{n}\cdot cos\frac{n\pi}{L}x.$$

После суммирования рядов по формулам (10.25) получаем $u_{t=0}=u_0$. Непосредственной подстановкой (10.26) в УЧП можно убедиться, что $u(x,t)$ удовлетворяет и уравнению (10.16).

Частное решение с учётом (10.21)

$$C_n(t)=\frac{2L}{n^2\pi^2}\left(q_H-(-1)^n q_K\right)\cdot exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right)+\frac{2L}{n^2\pi^2}\left((-1)^n q_K-q_H\right). \quad (10.22)$$

Здесь дополнительно необходимо найти ещё $C_0(t)$, т. е. выполнить косинус-преобразование (10.19) при $n=0$:

$$\frac{2}{L}\int_0^L\frac{\partial u}{\partial t}dt=\frac{2a^2}{L}\int_0^L\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

или

$$\frac{dC_0(t)}{dt}=\frac{2a^2}{L^2}\left(q_K-q_H\right).$$

Для этого уравнения начальным условием будет $S_0(0)=\frac{2}{L}\int_0^L u_0\cdot dx=2u_0$.

Частное решение при полученном начальном условии –

$$C_0(t)=\frac{2a^2}{L}\left(q_K-q_H\right)\cdot t+2u_0. \quad (10.23)$$

3 этап. Обратное преобразование.

Обратное преобразование выполняется по формуле (10.2):

$$u(x,t)=\frac{a^2}{L}\left(q_K-q_H\right)\cdot t+u_0+\frac{2Lq_K}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{cos\frac{n\pi}{L}x}{n^2}-\frac{2Lq_H}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos\frac{n\pi}{L}x}{n^2}+$$

$$+\frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_H-(-1)^n q_K}{n^2}\cdot exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right)\cdot cos\frac{n\pi}{L}x. \quad (10.24)$$

Для первых двух рядов в (10.24) можно найти суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k\frac{cos\,kx}{k^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos\,kx}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi x}{2}+\frac{x^2}{4}.$$

В нашем случае

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{cos\frac{n\pi}{L}x}{n^2}=\frac{\pi^2x^2}{4L^2}-\frac{\pi^2}{12}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos\frac{n\pi}{L}x}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2x}{2L}+\frac{\pi^2x^2}{4L^2}. \quad (10.25)$$

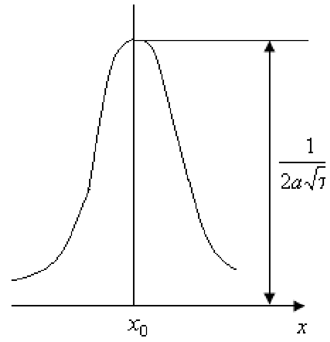


Рис. 9.2 – Кривая нормального распределения

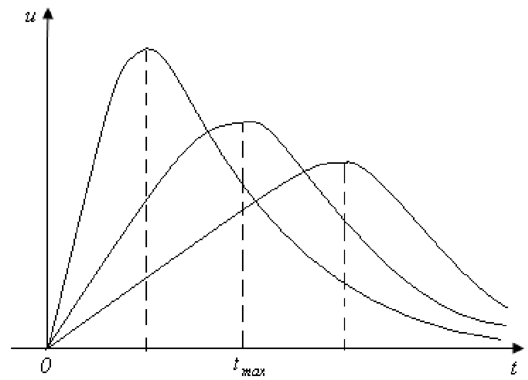


Рис. 9.3 – Изменение температуры

В каждый фиксированный момент времени функция $\varphi_{x_0}(x,t)$, как функция времени, сначала возрастает от 0 (при $t=0$) до некоторого максимального значения при $t=t_{max}$, а затем монотонно убывает, стремясь к нулю при $t\to\infty$. При $t=0$ функция $\varphi_{x_0}(x,t)$ не определена, но можно доказать по правилу Лопиталя, что $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\(x\neq x_0)}}\varphi_{x_0}(x,t)=0$.

Теперь Вы можете представить себе, как происходит распространение тепла (давления) при начальном значении $f(x)$ при $-\infty<x<\infty$. Температура (давление) в точке x в момент времени t, вычисляемая по формуле (9.14), есть результат суперпозиции (наложения) температур (давлений), возникающих в этой точке в момент времени t вследствие непрерывного распределения по стержню тепловых импульсов «интенсивности» $f(\xi)$ в точке ξ, приложенных в момент $t=0$.

Такие импульсы можно приближённо реализовать в виде большого числа языков пламени разной температуры, поднесённых в момент времени $t=0$ на очень короткий промежуток времени к стержню так, что в каждой точке ξ мгновенно возникает температура $f(\xi)$.

Конечно, это очень идеализированная картина, однако она наглядно описывает характер происходящего процесса.

9.2. Решение уравнения для бесконечной области методом преобразования Фурье

Задачу (9.1), (9.2) решим с применением преобразования Фурье.

Постановка задачи

$$\text{(УЧП)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \tag{9.19}$$

$$\text{(НУ)} \quad u_{t=0} = f(x). \tag{9.20}$$

Здесь преобразованию подлежит функция двух переменных $u(x,t)$, поэтому формулы (7.16) запишутся так

$$\begin{cases} F_\alpha(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\alpha x} dx \text{ (прямое преобразование)}, \\ u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(t) e^{i\alpha x} d\alpha \text{ (обратное преобразование)}. \end{cases} \tag{9.21}$$

1 этап. Преобразование задачи.

Поскольку пространственная переменная x изменяется в пределах $(-\infty; \infty)$, то подвергнем уравнение и начальное условие преобразованию Фурье по переменной x:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot e^{-i\alpha x} dx = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot e^{-i\alpha x} dx, \tag{9.22}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \cdot e^{-i\alpha x} dx = \Phi_\alpha(t), \tag{9.23}$$

где $\Phi_\alpha(t)$ – Фурье-образ функции $u(x,t)$.

Рассмотрим интегралы в равенстве (9.22)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot e^{-i\alpha x} dx = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \cdot e^{-i\alpha x} dx \right) = \frac{dF_\alpha(t)}{dt}.$$

Здесь $\dfrac{dF_\alpha(t)}{dt}$ – производная Фурье-образа функции $u(x,t)$.

Правую часть (10.19) интегрируем по частям:

$$a^2 \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \cos\frac{n\pi}{L} x dx = \left| \begin{matrix} u_1 = \cos\dfrac{n\pi}{L} x, & du_1 = -\dfrac{n\pi}{L} \sin\dfrac{n\pi}{L} x dx \\ dv = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx, & v = \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{matrix} \right| =$$

$$= a^2 \frac{2}{L} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\frac{n\pi}{L} x \Big|_0^L + \frac{n\pi}{L} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \sin\frac{n\pi}{L} x dx \right) = \frac{2a^2}{L^2} \left(q_K (-1)^n - q_H + \frac{n\pi}{L} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \sin\frac{n\pi}{L} x dx \right) =$$

$$= \left| \begin{matrix} u_1 = \sin\dfrac{n\pi}{L} x, & du_1 = \dfrac{n\pi}{L} \cos\dfrac{n\pi}{L} x dx \\ dv = \dfrac{\partial u}{\partial x} dx, & v = u \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2a^2}{L^2} \left(\left((-1)^n q_K - q_H \right) - \left(\frac{an\pi}{L} \right)^2 \frac{2}{L} \int_0^L u \cdot \cos\frac{n\pi}{L} x dx \right) =$$

$$= \frac{2a^2}{L^2} \left(\left(q_K (-1)^n - q_H \right) - \left(\frac{an\pi}{L} \right)^2 \cdot C_n(t) \right).$$

Найдем Фурье-образ начального условия:

$$C_0 = \frac{2}{L} \int_0^L u_0 \cdot \cos\frac{n\pi}{L} x dx = 0.$$

Образ задачи представляет ОДУ

$$\frac{dC_n(t)}{dt} + \left(\frac{an\pi}{L} \right)^2 \cdot C_n(t) = \frac{2a^2}{L^2} \left((-1)^n q_K - q_H \right) \tag{10.20}$$

при начальном условии

$$S_n(0) = 0. \tag{10.21}$$

2 этап. Решение преобразованной задачи.

Общее решение уравнения (10.20)

$$C_n(t) = A \cdot \exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L} \right)^2 t \right) + \frac{2L}{n^2 \pi^2} \left(q_K (-1)^n - q_H \right).$$

Подставим вместо рядов их суммы

$$u(x,t) = u_H + \frac{u_K - u_H}{L}x +$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_0 - u_H + (-1)^n\left(u_K - u_0\right)}{n}\cdot\exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right)\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x. \tag{10.15}$$

Сделаем проверку полученного решения. Сразу видно, что решение удовлетворяет ГУ. Если положить в (10.15) $t=0$ и полученные ряды просуммировать, то получим, что $u_t = u_0$.

При увеличении t члены ряда (10.15) убывают. При некоторых $t = t_p$ сумму ряда в (10.15) можно без большой ошибки заменить первым членом этого ряда:

$$u(x,t_p) = u_H + \frac{u_K - u_H}{L}x + \frac{2}{\pi}\left(u_0 - u_H + (-1)^n\left(u_K - u_0\right)\right)exp\left(-\left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 t_p\right)sin\frac{\pi}{L}x.$$

При дальнейшем увеличении t $(t\to\infty)$ можно пренебречь рядом или, как принято говорить, рассматривать стационарный режим:

$$u(x) = u_H + \frac{u_K - u_H}{L}x\,.$$

<u>Пример 2</u>. На границах области заданы производные. В задачах теплопроводности – тепловой поток, в задачах нефтедобычи – поток жидкости. Для упрощения решения задачи поток будем считать постоянным.

$$\text{(УЧП)}\quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\quad t>0; \tag{10.16}$$

$$\text{(ГУ)}\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = q_H - const\,,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = q_K - const\,; \tag{10.17}$$

$$\text{(НУ)}\quad u_{t=0} = u_0 - const\,. \tag{10.18}$$

Для решения поставленной задачи применим конечное косинус-преобразование Фурье (10.2).

1 этап. Преобразование задачи.

$$\frac{2}{L}\int_0^L\frac{\partial u}{\partial t}\cdot cos\frac{n\pi}{L}xdx = a^2\cdot\frac{2}{L}\int_0^L\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot cos\frac{n\pi}{L}xdx,\quad n=1,2,3... \tag{10.19}$$

Вычислим интегралы:

$$\frac{2}{L}\int_0^L\frac{\partial u}{\partial t}\cdot cos\frac{n\pi}{L}xdx = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{L}\int_0^L u\cdot cos\frac{n\pi}{L}xdx\right) = \frac{dC_n(t)}{dt}.$$

$$\frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot e^{-i\alpha x}dx = \left|\begin{array}{ll}\text{интегрирование по частям} & \\ u = e^{-i\alpha x}, & du = -i\alpha e^{-i\alpha x}dx \\ dv = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx, & v = \dfrac{\partial u}{\partial x}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot e^{-i\alpha x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot e^{-i\alpha x}dx\right) = \frac{a^2 i\alpha}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot e^{-i\alpha x}dx =$$

$$= \left|\begin{array}{ll}u = e^{-i\alpha x}, & du = -i\alpha e^{-i\alpha x}dx \\ dv = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx, & v = \dfrac{\partial u}{\partial x}\end{array}\right| = \frac{a^2 i\alpha}{\sqrt{2\pi}}\left(u\cdot e^{-i\alpha x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\alpha\int_{-\infty}^{\infty}u\cdot e^{-i\alpha x}dx\right) =$$

$$= -\frac{a^2\cdot\alpha^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u\cdot e^{-i\alpha x}dx = -a^2\cdot\alpha^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u\cdot e^{-i\alpha x}dx = -a^2\cdot\alpha^2\cdot F_\alpha(t).$$

Получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\text{(ОДУ)}\qquad \frac{dF_\alpha(t)}{dt} = -a^2\cdot\alpha^2\cdot F_\alpha(t),$$

$$\text{(НУ)}\quad \bar{u}(0) = \Phi_\alpha\,. \tag{9.24}$$

2 этап. Решение преобразованной задачи.

Эта задача очень простая. Сразу запишем решение

$$F_\alpha(t) = \Phi_\alpha\cdot e^{-a^2\alpha^2 t}. \tag{9.25}$$

3 этап. Обратное преобразование.

Для нахождения решения применим формулу обратного преобразования

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_\alpha\cdot e^{-a^2\alpha^2 t}\cdot e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_\alpha\cdot e^{i\alpha x}d\alpha\otimes\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\alpha^2 t}\cdot e^{i\alpha x}d\alpha =$$

$$= f(x)\otimes\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\ \text{(нашли в таблице)} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}d\xi\,. \tag{9.26}$$

Одна и та же задача решена двумя способами. Ответы (9.14) и (9.26) совпадают. Во втором случае решение очень компактное. Главная трудность в этом случае – переход от изображения решения к оригиналу.

<u>Примечание.</u> Сделаем разъяснения знака $\otimes$ в обратном преобразовании. Интегральное преобразование обладает так называемым свойством <u>свёртки.</u> Дело в том, что Фурье-образ произведения двух функций, вообще говоря, не равен произведению Фурье-образов этих функций, т. е.

$$F\left(f(x)\cdot q(x)\right)\neq F(f(x))\cdot F(q(x))\,.$$

Однако в теории преобразований есть операция, называемая <u>свёрткой</u> функций f и q (обозначается $f\otimes q$), которая в некотором смысле играет роль произведения, а именно, справедливо соотношение

$$F\left(f\otimes q\right)=F(f)\cdot F(q)\,. \tag{9.27}$$

Свёртка функций определяется, как

$$\left(f\otimes q\right)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x-\xi\right)\cdot g(\xi)d\xi\,. \tag{9.28}$$

<u>Пример.</u> Для функций $f(x)=x$, $q(x)=e^{-x^2}$ *свёртка равна*

$$\left(f\otimes q\right)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\xi\right)\cdot e^{-\xi^2}d\xi=\frac{x}{\sqrt{2}},\ \left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi=\sqrt{\pi}\right).$$

Важность понятия свёртки (9.28) состоит в том, что при решении УЧП необходимо применить обратное преобразование Фурье к выражению, которое является произведением двух Фурье-образов, т. е. должны найти

$$F^{-1}\left(F(f)\cdot F(q)\right). \tag{9.29}$$

Применяя обратное преобразование к обеим частям (9.27), получим

$$f\otimes q=F^{-1}\left(F(f)\cdot F(q)\right). \tag{9.30}$$

Следовательно, для определения (9.29) необходимо найти прообразы для каждого сомножителя, т. е. функций f *и* q*, а затем вычислить их свёртку.*

9.3. Решение задачи для полубесконечной области методом синус-преобразования Фурье

Рассмотрим задачу:

$$\text{(УЧП)}\quad \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<\infty,\quad t>0; \tag{9.31}$$

$$\text{(ГУ)}\quad u_{x=0}=u_H\quad \left(u_{x\to\infty}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x\to\infty}=0\right); \tag{9.32}$$

$$\text{(НУ)}\quad u_{t=0}=0\,. \tag{9.33}$$

Условие $u_{x\to\infty}=0$ говорит о том, что вдали от начала отсчёта («в бесконечности») среда не возмущена, поэтому температура (давление) равна начальной. Тогда и $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x\to\infty}=0$.

при начальном условии

$$S_n(0)=\frac{2u_0}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right). \tag{10.9}$$

2 этап. Решение преобразованной задачи.

Уравнение (10.8) – линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Его решение:

$$S_n(t)=c\cdot exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right)+\frac{2}{n\pi}\left(u_H-(-1)^n u_K\right). \tag{10.10}$$

Для определения произвольной постоянной <u>c</u> подчиним решение (10.10) условию (10.9)

$$\frac{2u_0}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)=c+\frac{2}{n\pi}\left(u_H-(-1)^n u_K\right),$$

откуда

$$c=\frac{2u_0}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)-\frac{2}{n\pi}\left(u_H-(-1)^n u_K\right).$$

Образ решения примет вид:

$$S_n(t)=\frac{2}{n\pi}\left(u_0-u_H+(-1)^n\left(u_K-u_0\right)\right)\cdot exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right)+\frac{2}{n\pi}\left(u_H-(-1)^n u_K\right). \tag{10.11}$$

3 этап. Обратное преобразование.

Напишем решение поставленной задачи, используя формулу обратного преобразования (10.1):

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_0-u_H+(-1)^n\left(u_K-u_0\right)}{n}\cdot exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right)+\frac{u_H-(-1)^n u_K}{n}\right)\cdot sin\frac{n\pi}{L}x\,. \tag{10.12}$$

Остается несколько преобразовать полученное решение:

$$u(x,t)=\frac{2u_H}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\frac{n\pi}{L}x}{n}-\frac{2u_K}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{sin\frac{n\pi}{L}x}{n}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_0-u_H+(-1)^n\left(u_K-u_0\right)}{n}\cdot exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right)\right)sin\frac{n\pi}{L}x\,. \tag{10.13}$$

Оказывается, первые два ряда в (10.13) суммируются

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{sin\frac{n\pi}{L}x}{n}=-\frac{\pi x}{2L},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\frac{n\pi}{L}x}{n}=\frac{\pi-\frac{\pi x}{2L}}{2}=\frac{\pi\left(L-x\right)}{2L}. \tag{10.14}$$

$$\text{(ГУ)}\quad \begin{cases} u_{x=0} = u_H \ - const, \\ u_{x=L} = u_K \ - const; \end{cases} \tag{10.4}$$

$$\text{(НУ)}\quad u_t = u_0 - const\,. \tag{10.5}$$

Решение. Применяем формулы (10.1).

1 этап. Преобразование задачи.

$$\frac{2}{L}\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}\cdot sin\frac{n\pi}{L}xdx = a^2\cdot\frac{2}{L}\int_0^L\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot sin\frac{n\pi}{L}xdx\,. \tag{10.6}$$

Вычислим интегралы:

$$\frac{2}{L}\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}\cdot sin\frac{n\pi}{L}xdx = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{L}\int_0^L u\cdot sin\frac{n\pi}{L}xdx\right) = \frac{dS_n(t)}{dt}\,. \tag{10.7}$$

Правую часть интегрируем по частям:

$$a^2\frac{2}{L}\int_0^L\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot sin\frac{n\pi}{L}xdx = \left| \begin{matrix} u_1 = sin\dfrac{n\pi}{L}x, & du_1 = \dfrac{n\pi}{L}cos\dfrac{n\pi}{L}xdx \\ dv = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx, & v = \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{matrix}\right| =$$

$$= a^2\frac{2}{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}sin\frac{n\pi}{L}x\Big|_0^L - \frac{n\pi}{L}\int_0^L\frac{\partial u}{\partial x}cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right) = -\frac{2a^2\pi n}{L^2}\int_0^L\frac{\partial u}{\partial x}cos\frac{n\pi}{L}xdx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u_1 = cos\dfrac{n\pi}{L}x, & du_1 = -\dfrac{n\pi}{L}sin\dfrac{n\pi}{L}xdx \\ dv = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx, & v = u \end{matrix}\right| = -\frac{2a^2\pi n}{L^2}\left(u\cdot cos\frac{n\pi}{L}x\Big|_0^L + \frac{n\pi}{L}\int_0^L u\cdot sin\frac{n\pi}{L}xdx\right) =$$

$$= \frac{u_H - (-1)^n u_K}{L^2}\cdot 2a^2 n\pi - \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2\cdot S_n(t)\,.$$

При вычислении последнего интеграла использованы ГУ (10.4).

Найдём Фурье-образ начального условия (10.5):

$$S_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L u_0\cdot sin\frac{n\pi}{L}xdx = \frac{2u_0}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right).$$

Образ задачи представляет ОДУ

$$\frac{dS_n(t)}{dt} + \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2\cdot S_n(t) = \frac{u_H - (-1)^n u_K}{L^2}\cdot 2a^2 n\pi \tag{10.8}$$

Задачу можно интерпретировать как температуру в одномерном случае. На одной границе задана температура u_0. Можно под $u(x,t)$ понимать давление в пласте, если на одной границе поддерживается давление u_H, отличное от начального давления.

Применим для решения задачи (9.31) – (9.33) синус-преобразование Фурье, определяемое формулами (7. 11а):

$$\begin{cases} F_\alpha(t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty u(x,t)\sin(\alpha x)dx \ \text{(прямое преобразование)}, \\ u(x,t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty F_\alpha(t)\sin(\alpha x)d\alpha \ \text{(обратное преобразование)}. \end{cases} \tag{9.34}$$

1 этап. Преобразование задачи.

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{\partial u}{\partial t}sin(\alpha x)dx = a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}sin(\alpha x)dx\,.$$

Вычислим интегралы. Правая часть интегрируется по частям:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{\partial u}{\partial t}sin(\alpha x)dx = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,t)\cdot sin(\alpha x)dx\right) = \frac{dF_\alpha(t)}{dt}\,. \tag{9.35}$$

$$a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}sin(\alpha x)dx = \left| \begin{matrix} u_1 = sin(\alpha x), & du_1 = \alpha cos(\alpha x) \\ dv = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx, & v = \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{matrix}\right| =$$

$$= a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}sin(\alpha x)\Big|_0^\infty - \alpha\int_0^\infty\frac{\partial u}{\partial x}cos(\alpha x)dx\right) = -\alpha\cdot a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{\partial u}{\partial x}cos(\alpha x)dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u_1 = cos(\alpha x), & du_1 = -\alpha\, sin(\alpha x) \\ dv = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx, & v = u \end{matrix}\right| = -\alpha\cdot a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(u\cdot cos(\alpha x)\Big|_0^\infty + \alpha\int_0^\infty u\cdot sin(\alpha x)dx\right) =$$

$$= \alpha\cdot a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot u_H - \alpha^2\cdot a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u\cdot sin(\alpha x)dx = \alpha\cdot a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot u_H - \alpha^2\cdot a^2\cdot F_\alpha(t)\,. \tag{9.36}$$

Найдём Фурье-образ для начального условия

$$F_\alpha(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty 0\cdot sin(\alpha x)dx = 0\,.$$

Прообраз задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dF_\alpha(t)}{dt} + (\alpha \cdot a)^2 F_\alpha(t) = \alpha \cdot a^2 \cdot u_H \cdot \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}, \\ F_\alpha(0) = 0. \end{cases} \tag{9.36}$$

2 этап. Решение преобразованной задачи.

Полученное уравнение является линейным уравнением 1-го порядка. Решение его с учётом граничного условия –

$$F_\alpha(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{u_H}{\alpha} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{u_H}{\alpha} \cdot e^{-(\alpha a)^2 t}. \tag{9.37}$$

3 этап. Обратное преобразование.

Согласно формуле (9.34) обратного преобразования,

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \cdot u_H \int_0^\infty \frac{sin(\alpha x)}{\alpha} d\alpha - u_H \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-(\alpha a)^2 t}}{\alpha} d\alpha = u_H \left(1 - erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right), \tag{9.38}$$

где $erf(u) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^u e^{-\xi^2} d\xi$ называется интегралом ошибок Гаусса, или интегралом вероятности.

Для получения результата можно пользоваться таблицами синус-преобразований.

Решение задачи можно записать и в форме

$$u(x,t) = u_H \cdot erfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right),$$

где $erfc\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}} \right) = 1 - erf\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}} \right)$.

Для интеграла ошибок Гаусса составлены подробные таблицы, поэтому расчёты по формуле (9.38) не представляют сложностей.

10. Решение уравнений методом конечных синус- и косинус-преобразований Фурье

Метод разделения переменных, использованный выше при решении уравнения теплопроводности, предусматривает обязательность двух условий: 1) однородность уравнения; 2) однородность ГУ. Если не выполняется хотя бы одно из этих условий, найти собственные значения задачи не удаётся.

Частично этих недостатков лишен метод конечного синус- и косинус-преобразования Фурье. Этим методом можно решать однородные и неоднородные УЧП, заданные в конечной области, при неоднородных ГУ. Преимуществом метода является и то, что довольно просто выполняется обратное преобразование (переход от изображения к оригиналу).

Недостатком метода является невозможность применения этих преобразований в случае, если УЧП содержит первую производную по пространственной координате.

Напомним формулы (7.7) и (7.8) прямого и обратного преобразований

$$\begin{cases} S_n(t) = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L u(x,t) \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x dx,\ n = 1,2,3... \ (\text{прямое преобразование}), \\ u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty S_n(t) \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (\text{обратное преобразование}); \end{cases} \tag{10.1}$$

$$\begin{cases} C_n(t) = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L u(x,t) \cdot \cos \frac{n\pi}{L} x dx,\ n = 0,1,2... \ (\text{прямое преобразование}), \\ u(x,t) = \dfrac{C_0(t)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^\infty C_n(t) \cdot \cos \frac{n\pi}{L} x \quad (\text{обратное преобразование}). \end{cases} \tag{10.2}$$

Примечание. Для выбора ядра преобразования при соответствующих ГУ необходимо руководствоваться таблицей 7.1.

Приведём примеры решения задач.

Пример 1. На границе области заданы значения функции. Для уравнения теплопроводности – постоянные температуры. Для уравнения пьезопроводности – давления на границах пласта:

$$(\text{УЧП}) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \tag{10.3}$$